ALN 2022
Clase 11
29/9

Recordar que si $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d$ es un polinomio de grado $\underline{\underline{d}}$, y si perturbamos el coeficiente k-ésimo entonces se tiene lo siguiente:

si $S(a_0, \ldots, a_d) = \zeta$ localmente, con $p(\zeta) = 0$ y $p'(\zeta) \neq 0$

$$\frac{\partial S}{\partial a_k}(\vec{a}, \zeta) = \frac{\zeta^k}{p'(\zeta)}$$

y por lo tanto, tomando $\|\cdot\|_2$ en $P_d = \mathbb{C}^{d+1}$, y $|\cdot|$ en $\mathbb{C}$

$(S : \mathbb{C}^{d+1} \dashrightarrow \mathbb{C})$

obtenemos

$$\operatorname{cond}(p, \zeta) = \|DS(\vec{a})\| = \|\nabla S(\vec{a})\|_2$$

(Ejercicio: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ con $\|\cdot\|_2$
$\Rightarrow \|Df(x)\|_{op} = \|\nabla f(x)\|$)

$$= \frac{\left(\sum_{k=0}^{d} |\zeta|^{2k}\right)^{1/2}}{|p'(\zeta)|}.$$

En este sentido tenemos una prueba analítica de que si $p'(\zeta) \simeq 0$ estamos en problemas. (a menos de problemas de escala en $\|p\|$ y $|\zeta|$ que puedan cancelar el denominador).

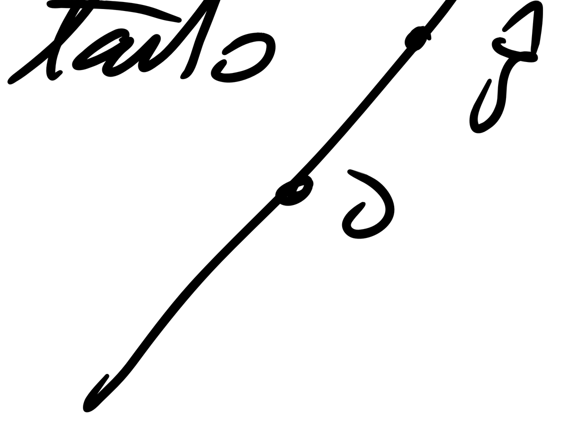
¿Cómo evitar problemas de escala? Normalizar el input. Se realiza de manera sencilla, basta normalizar el polinomio p por $p/\|p\|$. ¿Pero qué sucede con $|\zeta|$? En este caso es más complicado, dado que $|\zeta| \simeq 0$ o $\frac{1}{|\zeta|} \simeq 0$. En el fondo nuestro problema es que $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ no son <u>compactos</u>! Una forma de evitar estos problemas engorrosos fue sugerido por el trabajo de Shub-Smale en la complejidad del Teo. de Bezout que fue homogenizar los polinomios $f \to \hat{f}(z, w) = w^d f\left(\frac{z}{w}\right)$

i.e. $\hat{p}(z,w) = a_0 w^d + a_1 z w^{d-1} + \cdots + a_{d-1} z^{d-1} w + a_d z^d$,

y por lo tanto $\hat{p}(\lambda z, \lambda w) = \lambda^d \hat{p}(z,w)$ y entonces

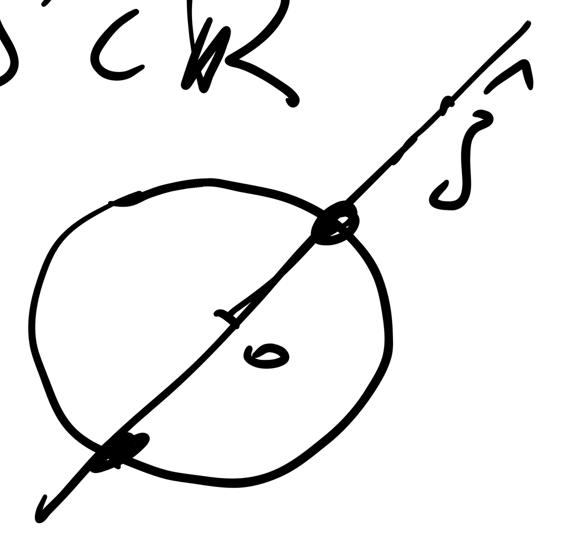
si $\hat{\zeta} = (\alpha, \beta)$ satisface $\hat{p}(\hat{\zeta}) = 0 \iff p(\lambda \hat{\zeta}) = 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$,

es decir las raíces son rectas por el origen y por lo tanto un espacio natural para mirar las soluciones (i.e. el output) es el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$.



En el caso real, se puede tomar el círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

De esta manera nuestras soluciones viven en un espacio compacto.



Veamos un enfoque geométrico del condicionamiento.

Número de Condición Revisitado (Enfoque Geométrico)

Sea $\mathcal{I}$ el espacio de inputs y $\mathcal{O}$ el espacio de outputs.

Estos espacios podrían ser espacios euclídeos ($\mathbb{R}^k$, $\mathbb{C}^k$ con sus respectivos productos internos) o espacios más generales como variedades diferenciables. Por dar algunos ejemplos que vimos en clase como espacios de outputs serían la esfera S^n, espacios proyectivos, la grassmanniana, la variedad de Stiefel.

Todos los ejemplos anteriores surgen como espacios naturales de problemas ya vistos. Por ejemplo si damos el problema de encontrar la descomposición $\hat{Q}\hat{R}$ de una matriz, el mapa $A \mapsto \hat{Q}$ con $A = \hat{Q}\hat{R}$ es un mapa donde el output está en la variedad de Stiefel.

- Variedad Solución

La variedad solución (o variedad de incidencia) es el conjunto $V \subset I \times O$ dado por $V = \{(a,x) : x \text{ es un output de } a\}$.

En nuestro ejemplo de polinomios tenemos $I = \mathcal{P}_d(\mathbb{C})$, $O = \mathbb{C}$ y la variedad solución está dada por

$$V = \{(p,\zeta) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \; : \; p(\zeta) = 0\}.$$

(Pol)

Observar que en este caso, donde el espacio de inputs puede ser entendido como un espacio de funciones, la variedad solución $V = Ev^{-1}(0)$ donde el mapa $Ev : \mathcal{P}_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es el mapa evaluación

$$Ev(p,z) = p(z).$$

Dado que $V \subset I \times O$ hay dos proyecciones naturales $\pi_1 : V \longrightarrow I$, $\pi_2 : V \longrightarrow O$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\ I & O \end{tikzcd}$$

Observar que $\pi^{-1}(a) = \{(a,x) : x \text{ output de } a\}$

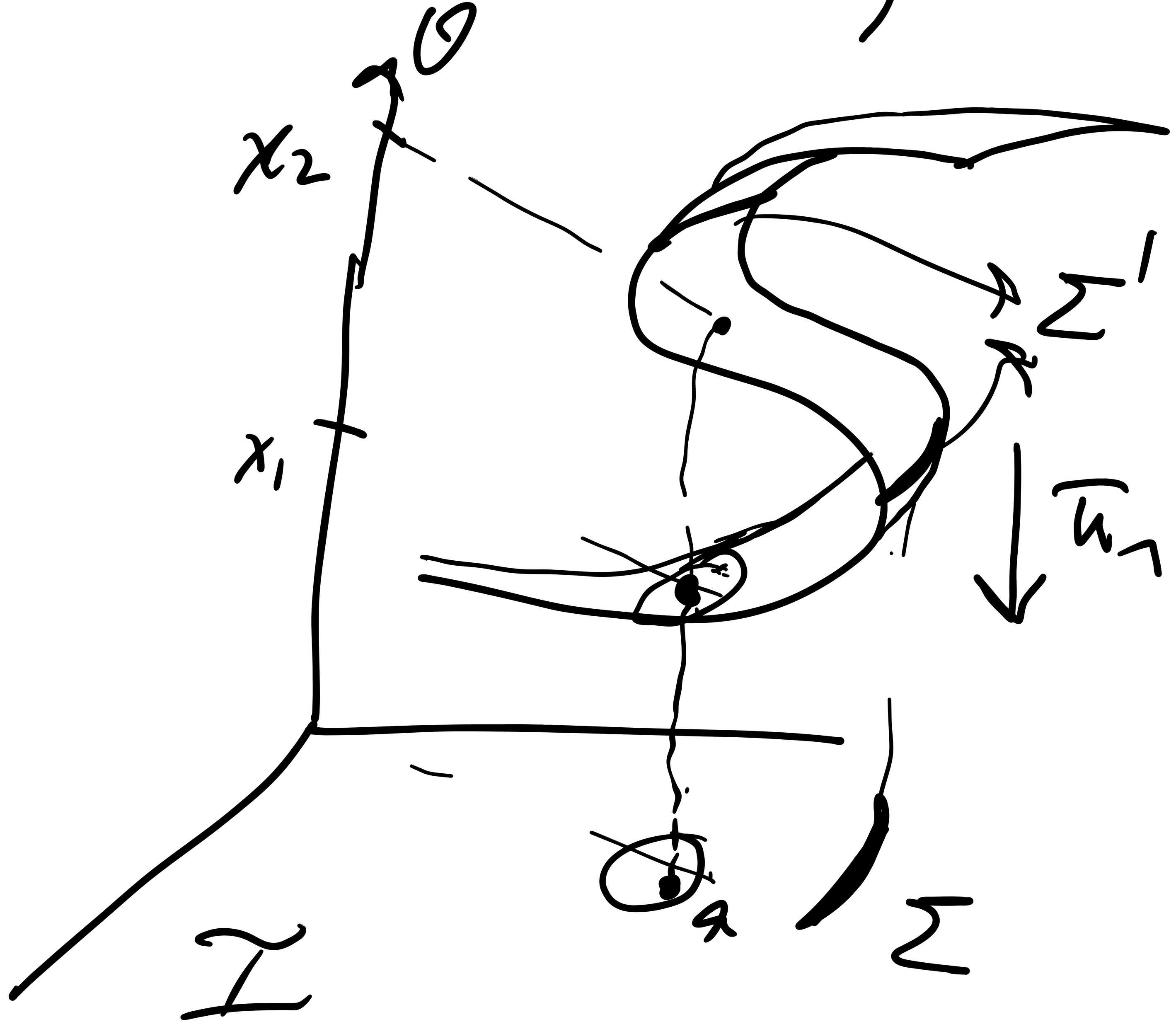
y por lo tanto se puede identificar con el conjunto de soluciones o outputs correspondientes al input $a \in I$.

En el caso de (Pol) $\pi^{-1}(p) \equiv \{\zeta : p(\zeta) = 0\}$ raíces de p.
Y si trabajamos sobre los Reales, ¿quién es $\# \pi^{-1}(p)$?

Supongamos que la $\dim V = \dim I$ (no es una condición muy restrictiva y basta pedir que el conjunto de outputs sea discreto)

Denotamos por $\Sigma' \subset V$ al conjunto de puntos críticos de $\pi_1 : V \to I$ (i.e. $(a,x) \in V$ tq. $D\pi_1(a,x)$ no es de rango máximo) es decir no invertible

$$\Sigma' = \{ (a,x) \in V : rk(D\pi_1(a,x)) < \dim I \}$$



Sea $\Sigma = \pi_1(\Sigma')$ la <u>variedad discriminante</u>.

~~Para fijar ideas supongamos que $\exists F : I \times O \to$~~

Luego obtenemos que si $(a,x) \in V$ y $a \in I \setminus \Sigma$ existe una inversión local.

$Sol_{(a,x)} : U_a \subset I \longrightarrow U_x \subset O$ entre abiertos de I y O respectivamente.

$$(\hat{a}, Sol_{(a,x)}(\hat{a})) \in V \qquad \forall \hat{a} \in U_a$$

donde $Sol_{(a,x)} := \pi_2 \circ \left(\pi_1 \big|_{U_a}\right)^{-1} : U_a \to U_x$.

$Sol_{(a,x)}$ se llama <u>mapa solución</u>

Luego estamos en condiciones de definir el nº de condición como

$$\mu(a,x) = \left\| DSol_{(a,x)}(a) \right\|_{op} = \max_{\substack{\dot{a} \in T_a I \\ \|\dot{a}\| = 1}} \|\underbrace{DSol_{(a,x)}(a)\,\dot{a}}_{\in T_x O}\|$$

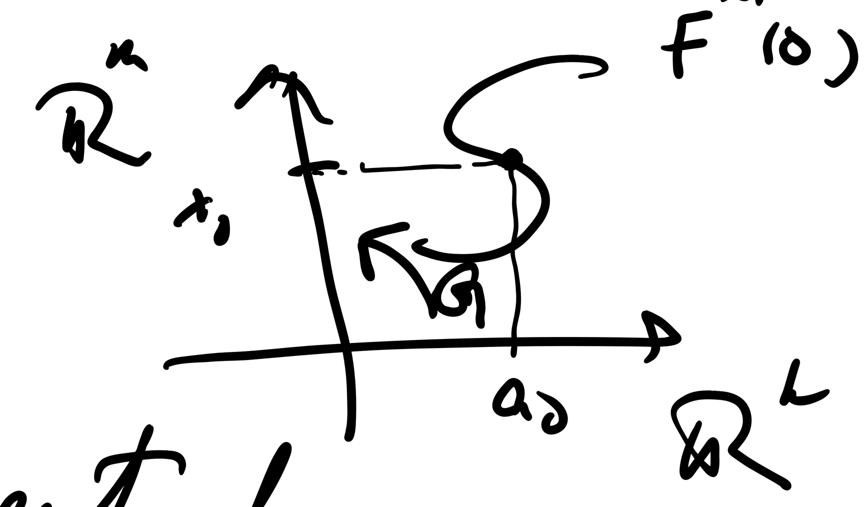
donde $T_a I$ y $T_x O$ son los tangentes respectivos.

Bajando lo anterior a tierra.

Supongamos que tenemos un mapa $F: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (C^1)
y tenemos que $F(a_0, x_0) = 0$, y que $\frac{\partial F}{\partial x}(a_0, x_0) \neq 0$,
entonces el teo. de Función Implícita dice que existe un mapa

$G: U_{a_0} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ que es C^1 y tal que $F(a, G(a)) = 0$

$\forall a \in U_{a_0}$.



Pensando en $a \in \mathbb{R}^k$ como input y $x \in \mathbb{R}^m$ como output
tenemos que G es el mapa input-output o mapa solución,

y $\| DG(a_0) \|$ es el <u>nº de condición</u>.

Mirando desde este punto de vista, si $F = Ev : \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$Ev(p, x) = p(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i,$$

tenemos que $Ev(p, x_0) = 0$ sii $p(x_0) = 0$

Luego si $\frac{\partial Ev}{\partial x}(p, x_0) = \frac{\partial}{\partial x} p(x) \Big|_{x = x_0} = p'(x_0) \neq 0$ existe
el mapa solución y el correspondiente nº de condición.

~~La versión superada es~~ Diferenciando F: ~~...~~ $0 = F(a, G(a))$

tenemos $\frac{\partial F}{\partial a}(a_0, x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(a_0, x_0) \cdot DG(a_0) = 0$ de donde resulta

$$\underline{DG(a_0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}(a_0, x_0) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial a}(a_0, x_0)}$$

¿Cómo se vincula esto con la discusión anterior de la variedad solución?

Sea $V = \{(a,x) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m : F(a,x) = 0\} = F^{-1}(0)$

~~Dominio~~ Supongamos que 0 es un valor regular de F y por lo tanto V es una variedad diferenciable de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ de codimensión m, (~~o~~ dimensión k). Sea $\pi_1 : V \to \mathbb{R}^k$, $(a,x) \in V$.

Lema: $D\pi_1(a,x) : T_{(a,x)}V \to \mathbb{R}^k$ es singular $\iff \frac{\partial F}{\partial x}(a,x)$ es singular

Dem: $T_{(a,x)}V = \ker DF(a,x) = \{(\dot a, \dot x) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m : \frac{\partial F}{\partial a}(a,x)\dot a + \frac{\partial F}{\partial x}(a,x)\dot x = 0\}$

Además $D\pi_1(a,x)(\dot a, \dot x) = \dot a$. Luego si $D\pi_1(a,x)$ es singular existe $(\dot a, \dot x)$ (no nulo) tq. $\dot a = 0$, i.e. $\exists\, (0, \dot x) \in T_{(a,x)}V$ con $\dot x \neq 0$. Esto es equivalente a $\frac{\partial F}{\partial x}(a,x)\dot x = 0$.

Por lo tanto $\frac{\partial F}{\partial x}(a,x)$ singular. La vuelta es análoga. $\square$

Hemos probado que si $(a,x) \in V \setminus \Sigma'$ sii $\frac{\partial F}{\partial x}(a,x)$ invertible

El mapa $Sol_{(a,x)} : U_a \to U_x$ que definimos antes es justamente el mapa $G : U_a \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ que satisface $F(\hat a, G(\hat a)) = 0$ $\forall \hat a \in U_a$ entorno de a.