El efecto de las intervenciones

Inverse Probability Weighing
Mediación
Inferencia Causal en sistemas lineales

Matías Reyes

Facultad de Ciencias
UdelaR

29 de Setiembre de 2022

Repaso.

- Fórmula de ajuste:

$$P(Y=y|do(X=x)) = \sum_z P(Y=y|X=x, Z=z)P(Z=z)$$

- **Regla 1:** la regla del efecto causal.
- Back-Door Criterion.
- Front-Door Criterion.
- Front-Door Adjustment:

$$P(y|do(x)) = \sum_z P(z|x) \sum_{x'} P(y|x', z)P(x')$$

- **Regla 2:** Efecto z-especifico

Inverse Probability Weighing

El procedimiento de ajuste es una forma directa y por lo tanto fácil de usar para explicar el criterio de intervención de forma teórica pero muchas veces su uso en la practica puede caro caro y no preciso.

Caro por el hecho de que estamos sumando sobre toda posible subpoblación dado por los valores que puede tomar el conjunto de variables Z, en el caso de que Z tenga una gran cantidad de variables las cuales toman gran cantidad de valores, la formula de ajuste se vuelve demasiado costosa. Por otra parte si la cantidad de observaciones que cae dentro de cierta subpoblación es demasiado pequeña entonces no podemos dar una buena estimación de la probabilidad condicional de Y dado X.

Inverse Probability Weighing

Para evadir los problemas prácticos de la formula de ajuste trabajamos bajo la suposición de que tenemos una buena aproximación de la función $g(x, z) = P(X = x|Z = z)$, llamada *propensity score* para cada x y z

(Ejemplo de Simpson (Pearl) o Hernán, Robins)

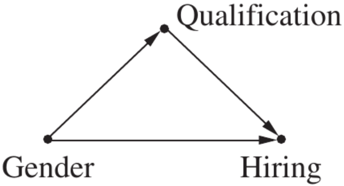
Mediación

hasta ahora en lo que tiene que ver con el proceso de intervención hemos trabajado con relaciones de causalidad directas. En este caso vamos a estudiar relaciones causales indirectas en donde una variable causa a otra mediante un conjunto de variables de mediación. Un ejemplo que ya vimos de causalidad indirecta es la del ejemplo de la paradoja de Simpson, en ese caso el tratamiento es una causa directa e indirecta (a través de la presión arterial) de la recuperación.

En muchos casos nos interesa saber cuanto del efecto de la variable X sobre la variable Y es directo y cuanto es indirecto. En la practica separar estos dos efectos no es fácil.

Mediación

Ej.: Supongamos que queremos investigar si una empresa discrimina en base al genero de una persona (X) en sus practicas de empleo (Y). Esto constituiría un efecto directo de genero sobre empleo. Sin embargo a menudo las mujeres tienen más o menos probabilidad de entrar a un campo laboral o tener títulos avanzados en dichos campos. Esto configura una relación causal indirecta Entre genera y practicas de empleo con la variable cualificación (Z) como mediadora



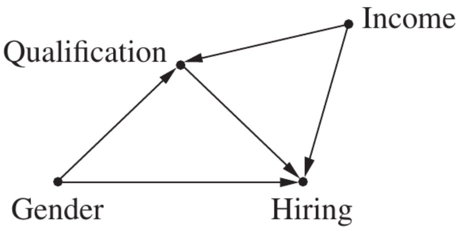
Con el objetivo de encontrar el efecto directo de *Gender* en *Hiring* necesitamos de alguna manera dejar a *Qualifications* quieta para luego medir el efecto restante entre *Gender* y *Hiring*

Mediación

Tradicionalmente esto se haría condicionando en las variables de mediación. Esto es si $P(\text{Contratada}|\text{Femenino,Altamente calificada})$ es diferente a $P(\text{Contratada}|\text{Masculino,Altamente calificada})$, hay una relación directa entre *Gender* y *Hiring*.

Esto es correcto si nos estamos basando en un modelo representado por la figura anterior, pero no es así si consideramos la variable *Income*, es decir los ingresos de cada persona ya que las personas con mayor poder adquisitivo tienen también mayor probabilidad de haber concluido algún tipo educación terciaria y por lo tanto tener mas contactos que las ayudarían a ser contratadas.

Mediación



En este nuevo modelo *Qualifications* se vuelve un collider y por lo tanto al condicionar en él abrimos un camino causal entre *Gender* y *Income*. No importa como condicionemos siempre vamos a tener algún camino no directo entre Gender y Hiring, esto causado que muchos problemas de mediación se abandonen al no poder definir con exactitud el concepto de "efecto directo"

Por suerte en las partes anteriores hemos definido y trabajado el concepto de Intervención. Si en vez de condicionar en Qualifications, intervenimos la flecha de Income a Qualification y la de Gender a Qulifications desaparecen.

Mediación

Definicion: Sean X,Y y Z, donde Z es un mediador entre X e Y definimos el *efecto directo controlado (controlled direct effect)* (CDE) sobre Y cambiando el valor de X de x a x' como:

$$CDE = P(Y = y|do(X = x), do(Z = z)) - P(Y = y|do(X = x'), do(Z = z))$$

Obs.: El CDE puede variar para diferentes valores de z

¿Como estimamos el CDE en nuestro ejemplo cuando contiene dos do-operadores?

Primero notamos que no hay ninguna puerta trasera de X a Y y por lo tanto podemos sustituir $do(X = x)$ y $do(X = x')$ por condicionar en $X = x$ y $X = x'$ respectivamente. Luego removemos el termino $do(z)$ observando que hay dos puertas traseras de Z a Y, una por X y la otra por I. La primera esta bloqueada por estar X condicionado, luego solo hace falta ajustar para I. El resultado es

$$\sum_i [P(Y = y|X = x, Z = z, I = i) - P(Y = y|X = x', Z = z, I = i)]P(I = i)$$

En general el CDE de X en Y mediado por Z es identificable si:

1. Existe S_1 conjunto de variables que bloquea todas las puertas traseras de Z a Y
2. Existe S_2 conjunto de variables que bloquea todas las puertas traseras de X a Y después de eliminar las flechas entrantes a Z

Tratar de estimar el efecto causal indirecto es aún mas difícil ya que no hay una forma simple de condicionar la relación directa entre X e Y.

Inferencia Causal en sistemas lineales

Hasta ahora el trabajo que hicimos tiene la ventaja que funcionan en todo tipo de relación. Sin embargo estas libertades nos limitan en nuestra habilidad de presentar todo el potencial de estos métodos en sistemas lineales.

De ahora en más en todos los modelos que presentemos vamos a hacer una suposición sobre la relación entre nuestras variables, dichas relaciones van a ser lineales donde las variables van tener una distribución normal (en algunos casos podríamos asumir solamente la propiedad de distribución simétrica).

Inferencia Causal en sistemas lineales

Esta suposición de normalidad no deja con cuatro importantes propiedades

1. Representación Eficiente
2. Sustitución de esperanzas por probabilidades
3. Esperanzas lineales
4. Invarianza de los coeficientes de regresión

Definicion: El *Coeficiente de camino (path coefficient)* o coeficiente estructural β de la arista $X \to Y$ cuantifica la contribución de X en la función que define a Y

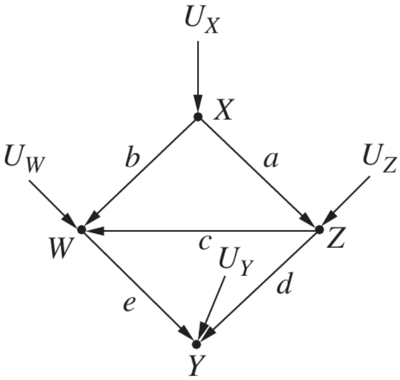
Ej.: $Y = 3X + U$, entonces $\beta = 3$

Como vamos a tratar con modelos lineales y por lo tanto con ecuaciones con estructura de regresiones seria bueno tener claro la diferencia entre los coeficientes de regresión y los estructurales.

Una ecuación de regresión es descriptiva, no hace ninguna suposición sobre las relaciones causales entre las variables involucradas en dicha ecuación. Simplemente nos preguntamos que valores r_1, r_2 harían de la ecuación $y = r_1 x + r_2 z$ la mejor aproximación lineal a los datos.

En un sistema lineal cada coeficiente estructural representa el efecto directo de una variable independiente X en una variable dependiente Y (ver regla de ajuste anterior)

Ej.: Queremos estimar el efecto directo de Z en Y



Las ecuaciones estructurales son:

$$
\begin{aligned}
X &= U_x \\
Z &= aX + U_z \\
W &= bX + cZ + U_W \\
Y &= dZ + eW + U_Y
\end{aligned}
$$

Usar la formula de ajuste interior

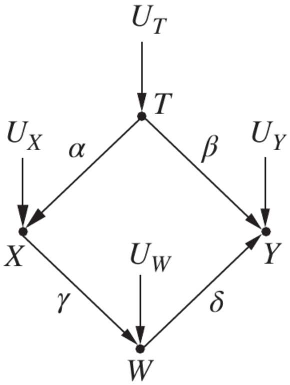
¿Que pasa con el efecto total de Z en Y?

Hasta ahora expresamos el efecto directo y total en términos de los coeficientes estructurales, asumiendo que dichos coeficientes ya nos son conocidos. Lo que vamos a tratar de hacer ahora es calcular dichos efectos desde usando datos no experimentales. Este problema es conocido como "identificabilidad" y matemáticamente es equivalente a expresar los coeficientes estructurales asociados a los efectos en base a las covarianzas σ_{XY} o a los coeficientes de regresión $R_{YX \cdot Z}$

Sin embargo en muchos casos no es necesario identificar cada parámetro estructural del modelo para poder calcular estas efectos. Por ejemplo para calcular el efecto total, el BDC nos da un conjunto de variables de ajuste Z para lograr calcular el efecto total entre X e Y. En nuestro modelo lineal una vez que tenemos Z solo hace falta calcular la esperanza condicional de Y dado X y Z para luego promediar sobre Z y obtener la dependencia entre Y y X para medir el efecto de X en Y. Ahora solo tenemos que traducir esto al idioma de las regresiones.

Esta traduccion es simple, solo hace falta obtener las variables Z para luego hacer una regresion de Y en X y Z, luego el coeficiente de X en la ecuación que quede es el efecto causal de X en Y

Ej.: Queremos encontrar el efecto causal de X en Y

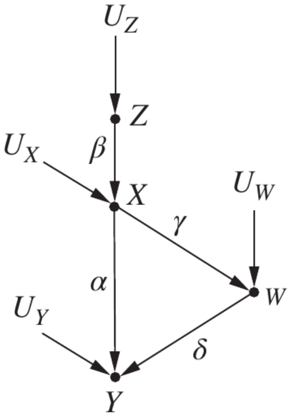


El BDC nos dice que tenemos que ajustar para T. Así que planteamos $y = r_X X + r_T T + \varepsilon$

¿Qué pasa si queremos estimar el efecto directo?

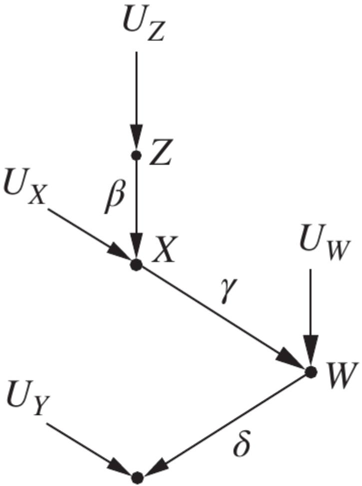
Si no tiene una arista compartida apuntando a Y sabemos que es 0

Ej.: Queremos encontrar el efecto causal directo de X en Y



Es un procedimiento parecido a el BDC pero esta vez ademas de bloquear todas las puertas traseras, bloqueamos los caminos indirectos. Primero removemos cualquier arista de X a Y, luego en el grafo resultante G_α identificamos las variables que d-separan a x e Y para luego hacer una regresión de Y en X y en dichas variables

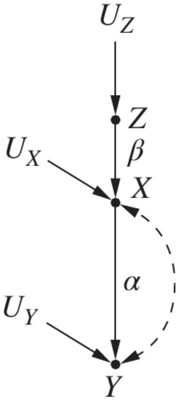
Ej.: Queremos encontrar el efecto causal directo de X en Y



Es un procedimiento parecido a el BDC pero esta vez ademas de bloquear todas las puertas traseras, bloqueamos los caminos indirectos. Primero removemos cualquier arista de X a Y, luego en el grafo resultante G_α identificamos las variables que d-separan a x e Y para luego hacer una regresión de Y en X y en dichas variables

¿Qué pasa si no hay variable que d-separe?

Ej.: Queremos encontrar el efecto causal directo de X en Y y no hay variables que d-separen en G_α



Podemos usar una *Variable Instrumental* para determinar el efecto directo. Una variable es instrumental di esta d-separada de Y en G_α y esta d-conectada a X. Podemos hacer dos regresiones de X e Y sobre Z.