Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Licenciatura en Matemática
Teoría de Representaciones
Año 2022

Repartido 4: Anillos y R-álgebras, generalidades

1. Dado un anillo R, A es una R-álgebra si es un R-módulo a izquierda, además es un anillo (con unidad) y se verifica

$$r(a \cdot b) = (ra) \cdot b = a \cdot (rb), \forall r \in R, a, b \in A.$$

Una R-subálgebra $B \subseteq A$ es un R-submódulo que además es un subanillo.
Un morfismo $f : A \to A'$ de R-álgebras es un morfismo de R-módulos y de anillos.

   a) Observar que todo anillo conmutativo R es una R-álgebra.

   b) Probar que el centro $Z(A)$ es una R-subálgebra de A. Y que un anillo A es una R-álgebra si y sólo si A es un anillo y $\varphi_A : R \to A$ definida por $\varphi_A(r) = r1_A$ es un morfismo de anillos cuya imagen está contenida en el centro de A .

   c) Sean A, B dos R-álgebras, y φ_A, φ_B como en la parte anterior. Probar que $f : A \to B$ es morfismo de R-álgebras si y sólo si es morfismo de anillos y $f \circ \varphi_A = \varphi_B$.

   d) Sea R un anillo y K el ideal bilátero generado por $\{rs - sr \mid r, s \in R\}$. Probar que el anillo $\tilde{R} = \frac{R}{K}$ es conmutativo. Probar que A es una R-álgebra si y sólo si es una $\tilde{R}$-álgebra .

   e) Probar que todo anillo es una R-álgebra para cierto anillo conmutativo R y que los módulos sobre el anillo son exactamente los módulos sobre dicha R-álgebra.

A partir de ahora las R-álgebras se consideran sobre anillos conmutativos.

2. Sean A un anillo y R un subanillo conmutativo de A. Para cada $a \in A$, notamos $R[a]$ a la R-subálgebra de A generada por a.
Supongamos que a no es anulado por ningún polinomio de $R[x]$ (diremos a es trascendente sobre R).

   a) Probar que si $char A = n$, $R = \mathbb{Z}_n \subseteq A$ es subanillo y $\mathbb{Z}_n[a]$ es el subanillo de A generado por a.

   b) Probar que $R[a]$ es un R-módulo libre, es decir tiene base (sugerencia: distinguir en los casos en que a es entero sobre R y los casos en que no).

c) Notamos ahora $R[a,b]$ a la R-subálgebra de A generada por $\{a,b\}$, con a,b trascendentes.

   1) Probar que $R[a,b]$ es un R-módulo libre.
   2) Probar que $R[a] \otimes_R R[b] \cong R[a,b]$ como R-módulos.

3. Se considera el anillo $\mathbb{H}_\Bbbk$ de los cuaterniones sobre un cuerpo $\Bbbk$ definido como sigue: $\mathbb{H}_\Bbbk$ es el $\Bbbk$- anillo generado por $\{i,j,k\}$, con relaciones $\{i^2+1, j^2+1, k^2+1, ij-k, jk+i, ki+j\}$.

   a) Para $\Bbbk = \mathbb{R}$:
      - Hallar el centro de $\mathbb{H}_\Bbbk$
      - Probar que se trata de un anillo con división no conmutativo.

   b) Probar que si $char\Bbbk = 2$, $\mathbb{H}_\Bbbk$ es conmutativo.

4. Se considera el siguiente subconjunto de los cuaterniones

$$\mathbb{H}_2 = \left\{ \frac{a+bi+cj+dk}{2} \mid a \cong b \cong c \cong d \ (mod 2) \right\}$$

   a) Probar que es una $\mathbb{Z}$ subálgebra de $\mathbb{H}$ (se conoce como *anillo de Hurwitz*).
   b) Probar que es un $\mathbb{Z}$-módulo libre.
   c) Hallar el grupo G de los elementos invertibles de $\mathbb{H}_2$ y probar que el grupo de los cuaterniones $\{1,-1,i,-i,j,-j,k,-k\}$ es un subgrupo normal de G.

5. Sea D un dominio. Hallar $U(R)$, para $R = D[x]$ y $R = D[[x]]$. Generalizar a finitas variables.

6. Probar que si D es un anillo con división, entonces $D((x))$ también lo es.

7. Dar un ejemplo de un anillo R y un elemento $x \in R$ tal que $xR \subsetneq Rx$.

8. Un anillo se dice **simple** si no tiene ideales biláteros. Probar que si $\Bbbk$ es un anillo con división, entonces $M_n(\Bbbk)$ es un anillo simple y que los siguientes son subanillos de $M_n(\Bbbk)$ que no son simples:

   a) las matrices triangulares superiores $T_n(\Bbbk)$;
   b) las matrices triangulares superiores que verifican además $a_{in} = 0, \forall i \in \{2,3,\cdots,n-1\}$.

9. Probar que hay un monomorfismo lineal $\mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C})$, que además es morfismo de anillos. Deducir que $M_2(\mathbb{C})$ contiene un subanillo propio que es simple y generalizar a $M_n(\mathbb{C})$.

10. Probar que los siguientes son anillos de $M_2(\mathbb{Q})$ que no son simples:

   a) $M_2(\mathbb{Z})$;

   b) las matrices de $M_2(\mathbb{Z})$ tales que a_{12} es múltiplo de un natural fijo n;

   c) las matrices de $M_2(\mathbb{Z})$ tales que $a_{11} \equiv a_{22} \pmod{n}, a_{12} \equiv a_{21} \pmod{n}$.

11. *a*) Se consideran un anillo $\Bbbk$.

      1) Probar que $\delta_\lambda : \Bbbk \to \Bbbk$, $\delta_\lambda(a) = \lambda a - a\lambda, \forall a \in \Bbbk$ es una derivación (este tipo de derivaciones se llaman derivaciones internas del anillo).

      2) Probar que $\Bbbk[x; \delta] \cong \Bbbk[x]$. (Sugerencia: considerar $t = x - \lambda$).

   b) Considerar $\Bbbk = \mathbb{Z}[y]$ y la derivación dada por $\delta(p) = p'$. Probar que $\Bbbk[x; \delta] \ncong \Bbbk[x]$.

12. **Skew group ring**
   Se considera un monoide M y un anillo $\Bbbk$ tal que M actúa sobre $\Bbbk$ por morfismos de anillos, esto es, existe una operación $\cdot : G \times \Bbbk \to \Bbbk$ que verifica

$$\begin{aligned} &g \cdot (h \cdot \lambda) = (gh) \cdot \lambda, \forall g, h \in M, \forall \lambda \in \Bbbk \\ &e \cdot \lambda = \lambda, \forall \lambda \in \Bbbk \end{aligned}$$

   y tal que para cada $g \in M$, $\sigma_g := g \cdot \_\_ : \Bbbk \to \Bbbk$ es un morfismo de anillos.

   a) Probar que la operación $(a_g g) \cdot (b_h h) = a_g (g \cdot b_h) gh$, define una estructura de anillo en el espacio vectorial $\Bbbk M$. Lo notaremos $\Bbbk \star M$.

   b) Probar que si la acción es trivial (i.e. $g \cdot \lambda = \lambda$), entonces $\Bbbk \star M = \Bbbk M$.

   c) Probar que si M es el monoide libre generado por x, entonces $\Bbbk \star M \cong \Bbbk[x; \sigma_x]$.

   d) Probar que si M es el grupo libre generado por x, entonces $\Bbbk \star M \cong \frac{\Bbbk[x,y;\sigma_x]}{(xy-1,yx-1)}$.