Instituto de Física, Facultad de Ciencias - UDELAR
Manual de fórmulas y resultados matemáticos

8 de octubre de 2022

Índice

1. Operaciones vectoriales **5**
1.1. Relaciones vectoriales . . . 5
1.2. Producto mixto . . . 5
1.3. Símbolo de Levi-Civita . . . 5
1.3.1. Productos de ε . . . 6
1.3.2. Operaciones en términos de ε . . . 6

2. Transformación entre sistemas de coordenadas **6**
2.0.1. Transformación de coordenadas . . . 7
2.0.2. Transformación de versores . . . 7

3. Operadores vectoriales en distintos sistemas de coordenadas **8**
3.0.1. Coordenadas cartesianas . . . 8
3.0.2. Coordenadas cilíndricas . . . 9
3.0.3. Coordenadas esféricas . . . 9

4. Identidades de operadores vectoriales **10**

5. Teoremas integrales **11**
5.1. Curva - Superficie . . . 11
5.2. Superficie - Volumen . . . 11
5.3. Teoremas integrales en el plano . . . 11
5.4. Teorema de Helmholtz (Refs: [1], cap. V) . . . 12

6. Funciones trigonométricas y series de Fourier (Refs: [7], cap. 2 y [8], cap. 4) **13**
6.1. Ecuación diferencial . . . 13
6.2. Base de soluciones . . . 13
6.3. Series de Fourier . . . 14
6.3.1. Serie de Fourier exponencial . . . 14
6.3.2. Serie de Fourier trigonométrica . . . 14
6.4. Criterios de convergencia (Refs: [7], cap. 3. [8], cap. 4. [4], cap. 5. [10], cap. 13. [9], cap. 2) . . . 15
6.4.1. Convergencia en media . . . 15
6.4.2. Convergencia puntual . . . 15
6.4.3. Convergencia uniforme . . . 15
6.5. Operaciones sobre las series de Fourier (Refs: [7], cap. 2. [4], cap. 5. [10], cap. 15) 16
6.6. Propiedades de los coeficientes . . . 17
6.7. Identidad de Parseval (Refs: [7], cap. 2. [9], cap. 2. [10], cap. 11) . . . 17
6.8. Fenómeno de Gibbs (Refs: [8], cap. 4. [9], cap. 2) . . . 18

7. Transformada de Fourier (Refs: [9], cap. 7) **19**
7.1. Transformada de Fourier en una dimensión . . . 19
7.1.1. Propiedades . . . 20
7.1.2. Teorema de Plancherel . . . 21
7.1.3. Convolución . . . 21
7.1.4. Relación de incertidumbre . . . 21
7.2. Transformada de Fourier en dimensiones mayores (Refs: [9], cap. 7) . . . 22
7.2.1. Propiedades . . . 22

7.2.2. Teorema de Plancherel 23
7.2.3. Convolución 23
7.3. Transformada de Fourier de seno y coseno 24

8. Funciones especiales **25**
8.1. Factoriales y función Gama (Refs: [4], cap. 4) 25
8.1.1. Factoriales dobles 25
8.1.2. Función Gama 25
8.2. Funciones de Bessel (Refs: [6], cap. 3, [4], cap. 4, [18]) 26
8.2.1. Ecuación de Bessel - Base de soluciones 26
8.2.2. Ecuación modificada de Bessel 27
8.2.3. Funciones de Hankel 27
8.2.4. Formas asintóticas 28
8.2.5. Relaciones de recurrencia 28
8.2.6. Desarrollo de Fourier-Bessel (Refs: [4], cap. 5. [11], cap. 8, [12], cap. 8) . . 29
8.2.7. Desarrollos para las distintas CB 30
8.2.8. Convergencia de la serie de Fourier-Bessel 31
8.2.9. Primeros ceros de las funciones de Bessel 31
8.3. Funciones de Legendre (Refs: [4], cap. 4, [6], cap. 3) 33
8.3.1. Ecuación diferencial de Legendre 33
8.3.2. Polinomios de Legendre 34
8.3.3. Desarrollo de Fourier-Legendre (Refs: [12], cap. 9) 35
8.4. Funciones asociadas de Legendre (Refs: [12], cap. 9) 36
8.4.1. Funciones asociadas de Legendre de primer tipo 37
8.4.2. Desarrollo en serie de funciones asociadas 38
8.5. Convergencia de las series de Legendre 39
8.6. Armónicos esféricos (Refs: [6], cap. 3) 40
8.6.1. Ecuación 40
8.6.2. Propiedades 41
8.6.3. Visualización de los armonicos esféricos 41
8.6.4. Desarrollo en serie de armónicos esféricos 42
8.6.5. Armónicos esféricos reales 43
8.6.6. Teorema de adición 44

9. Desarrollos de 1/R (Refs: [6], cap. 3) **45**
9.1. Coordenadas esféricas 45
9.2. Coordenadas cilíndricas 45

10. Soluciones de la ecuación de Laplace **46**
10.1. Coordenadas cilíndricas 46
10.2. Coordenadas esféricas 46

11. Funciones de Green del laplaciano (Refs: [6], cap. 3) **47**
11.1. Generalidades 47
11.2. Propiedades 47
11.3. Algunas funciones de Green para problemas de Dirichlet 48

12. Identidades trigonométricas **49**

13. Valores de constantes **53**

14. Desarrollos en serie comunmente encontrados **54**

15. Series y Transformadas de Fourier **56**
15.1. Series de Fourier 56
15.2. Transformadas de Fourier 57
15.3. Transformada de Fourier de distribuciones (Refs: [16]) 59
15.4. Transformadas de seno y coseno (Refs: [13] y [14]) 60

16. Armonicos esféricos (Refs: [6], sec. 3.5 y [17]) **61**
16.1. Primeros armónicos 61
16.2. Primeros armónicos reales (Refs: [17]) 62

1. Operaciones vectoriales

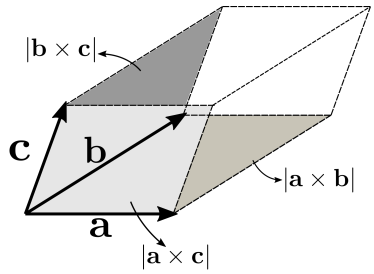
1.1. Relaciones vectoriales

[1], I.4 - I.5, [2], cap. 1

$$
\begin{array}{l}
|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \qquad \text{(Desigualdad triangular)} \\
\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{4}\left(|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2\right) = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2\right) \\
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a} \\
\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c} \\
|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \\
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}) \\
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{d}))\,\mathbf{c} - (\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))\,\mathbf{d}
\end{array}
$$

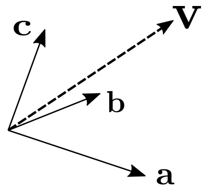
1.2. Producto mixto

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}] &= \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \\
&= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) \\
&= \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \\
&= \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$



- Representa el volumen del paralelepípedo formado los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.
- Un vector $\mathbf{v}$ puede ser descompuesto en términos de una base arbitraria $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ mediante productos mixtos:

$$
\mathbf{v} = \frac{[\mathbf{v},\mathbf{b},\mathbf{c}]}{[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]}\,\mathbf{a} + \frac{[\mathbf{v},\mathbf{c},\mathbf{a}]}{[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]}\,\mathbf{b} + \frac{[\mathbf{v},\mathbf{a},\mathbf{b}]}{[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]}\,\mathbf{c}
$$



1.3. Símbolo de Levi-Civita

El símobolo de Levi-Civita de n dimensiones $\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ se define como:

$$
\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \begin{cases} +1 & (i_1,i_2,\ldots,i_n) \sim (1,2,\ldots,n) \\ -1 & (i_1,i_2,\ldots,i_n) \sim (n,\ldots,2,1) \\ 0 & \text{si } i_a = j_b \text{ para algún par } a \neq b \end{cases}
$$

donde $\sim$ indica que las secuencias se relacionan por una permutación circular.
En las propiedades a continuación se utiliza la convención de suma en índices repetidos.

1.3.1. Productos de ε

$n=2$	$n=3$
$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$	$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$
$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{in} = \delta_{jn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{in} = \delta_{jn}$	$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$ $\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jmn} = 2\delta_{ij}$
$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = 2$	$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$

1.3.2. Operaciones en términos de ε

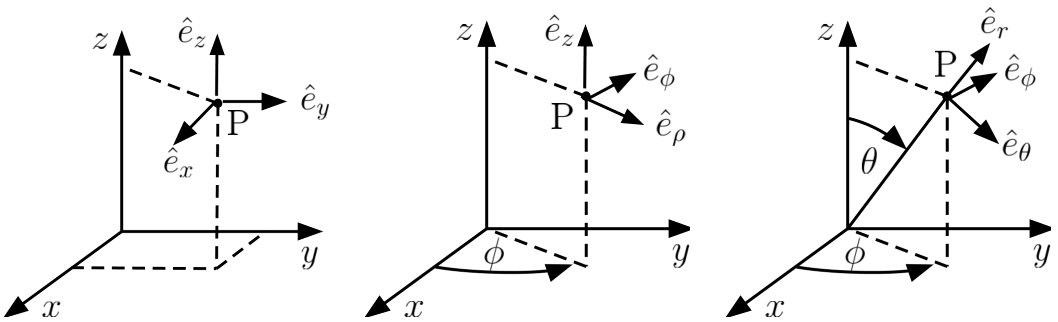
a y **b** son vectores de $\mathbb{R}^3$. A es una matriz $n \times n$.

Productos vectorial y mixto
$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, c_k$

Determinate
$\det A = \varepsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_n} A_{1j_1} A_{2j_2} \ldots A_{nj_n}$
$\det A = \dfrac{1}{n!}\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\varepsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_n} A_{i_1j_1} A_{i_2j_2} \ldots A_{i_nj_n}$
$\varepsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \det A = \varepsilon_{j_1,j_2,\ldots,j_n} A_{i_1j_1} A_{i_2j_2} \ldots A_{i_nj_n}$

2. Transformación entre sistemas de coordenadas

Cartesianas:	Cilíndricas:	Esféricas:
$-\infty < x < \infty$	$0 < \rho < \infty$	$0 < r < \infty$
$-\infty < y < \infty$	$0 < \phi < 2\pi$	$0 < \theta < \pi$
$-\infty < z < \infty$	$-\infty < z < \infty$	$0 < \phi < 2\pi$



(a) (b) (c)

Figura 3

2.0.1. Transformación de coordenadas

A: \ De:	**Cartesianas**	**Cilíndricas**	**Esféricas**
Cartesianas		$x = \rho \cos\phi$ $y = \rho \operatorname{sen}\phi$ $z = z$	$x = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$ $y = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi$ $z = r \cos\theta$
Cilíndricas	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\phi = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$ $z = z$		$\rho = r \operatorname{sen}\theta$ $\phi = \phi$ $z = r\cos\theta$
Esféricas	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x^2+y^2}/z)$ $\phi = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$	$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ $\theta = \operatorname{arc\,tg}(\rho/z)$ $\phi = \phi$	

2.0.2. Transformación de versores

En términos de las coordenadas de partida

Cartesianos a cilíndricos	Cartesianos a esféricos
$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \dfrac{x\hat{\boldsymbol{e}}_x + y\hat{\boldsymbol{e}}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \dfrac{-y\hat{\boldsymbol{e}}_x + x\hat{\boldsymbol{e}}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{e}}_z$	$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \dfrac{x\hat{\boldsymbol{e}}_x + y\hat{\boldsymbol{e}}_y + z\hat{\boldsymbol{e}}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \dfrac{xz\hat{\boldsymbol{e}}_x + yz\hat{\boldsymbol{e}}_y - (x^2+y^2)\hat{\boldsymbol{e}}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}}$ $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \dfrac{-y\hat{\boldsymbol{e}}_x + x\hat{\boldsymbol{e}}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
Cilíndricos a cartesianos	**Cilíndricos a esféricos**
$\hat{\boldsymbol{e}}_x = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho - \operatorname{sen}\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ $\hat{\boldsymbol{e}}_y = \operatorname{sen}\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ $\hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{e}}_z$	$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \dfrac{\rho\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + z\hat{\boldsymbol{e}}_z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \dfrac{z\hat{\boldsymbol{e}}_\rho - \rho\hat{\boldsymbol{e}}_z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \hat{\boldsymbol{e}}_\phi$
Esféricos a cartesianos	**Esféricos a cilíndricos**
$\hat{\boldsymbol{e}}_x = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta - \operatorname{sen}\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ $\hat{\boldsymbol{e}}_y = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \cos\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ $\hat{\boldsymbol{e}}_z = \cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_r - \operatorname{sen}\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$	$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \operatorname{sen}\theta\hat{\boldsymbol{e}}_r + \cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ $\hat{\boldsymbol{e}}_z = \cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_r - \operatorname{sen}\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$

En términos de las coordenadas de destino	
Cartesianos a cilíndricos	Cartesianos a esféricos
$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$ $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\operatorname{sen}\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$ $\hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{e}}_z$	$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y + \cos\theta\hat{\boldsymbol{e}}_z$ $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\theta\operatorname{sen}\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - \operatorname{sen}\theta\hat{\boldsymbol{e}}_z$ $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\operatorname{sen}\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$
Cilíndricos a cartesianos	Cilíndricos a esféricos
$\hat{\boldsymbol{e}}_x = \dfrac{x\hat{\boldsymbol{e}}_\rho - y\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\hat{\boldsymbol{e}}_y = \dfrac{y\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + x\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{e}}_z$	$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \hat{\boldsymbol{e}}_\phi$
Esféricos a cartesianos	Esféricos a cilíndricos
$\hat{\boldsymbol{e}}_x = \dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r + xz\hat{\boldsymbol{e}}_\theta - y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\hat{\boldsymbol{e}}_y = \dfrac{y\sqrt{x^2+y^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r + yz\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\hat{\boldsymbol{e}}_z = \dfrac{z\hat{\boldsymbol{e}}_r - \sqrt{x^2+y^2}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$\hat{\boldsymbol{e}}_\rho = \dfrac{\rho\hat{\boldsymbol{e}}_r + z\hat{\boldsymbol{e}}_\theta}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$ $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ $\hat{\boldsymbol{e}}_z = \dfrac{z\hat{\boldsymbol{e}}_r - \rho\hat{\boldsymbol{e}}_\theta}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$

3. Operadores vectoriales en distintos sistemas de coordenadas

[1], cap. IV y [2], cap. 6

3.0.1. Coordenadas cartesianas

Gradiente:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

Divergencia:

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotor:

$$\nabla\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

Laplaciano escalar:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Laplaciano vectorial:

$$\nabla^2\vec{A} = \nabla^2 A_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + \nabla^2 A_y\hat{\boldsymbol{e}}_y + \nabla^2 A_z\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

3.0.2. Coordenadas cilíndricas

Gradiente:
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{e}}_z$$
Divergencia:
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\rho\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
Rotor:
$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho A_\phi\right)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z$$
Laplaciano escalar:
$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$
Laplaciano vectorial:
$$\nabla^2 \vec{A} = \left(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \nabla^2 A_z \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

3.0.3. Coordenadas esféricas

Gradiente:
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$
Divergencia:
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$
Rotor:
$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\phi\,\mathrm{sen}\,\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\phi\right)\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\end{aligned}$$
Laplaciano escalar:
$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$
Laplaciano vectorial:
$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} &= \left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\left(A_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ &+ \left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &+ \left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} + \frac{2}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\end{aligned}$$

4. Identidades de operadores vectoriales

[1], cap. IV y [2], cap. 3 y 4

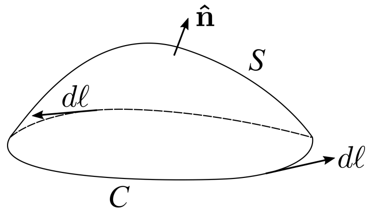
Derivadas de productos
Gradiente:
$\nabla(\psi\,\phi) = \phi\,\nabla\psi + \psi\,\nabla\phi$
$\nabla\,(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = (\mathbf{F}\cdot\nabla)\,\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\,\mathbf{F} + \mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G}) + \mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F})$
Divergencia:
$\nabla\cdot(\psi\mathbf{F}) = \psi\,\nabla\cdot\mathbf{F} \;+\; \mathbf{F}\cdot\nabla\psi$
$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) \;-\; \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})$
Rotor:
$\nabla\times(\psi\mathbf{F}) \;=\; \psi\,\nabla\times\mathbf{F} + \nabla\psi\times\mathbf{F}$
$\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) \;=\; \mathbf{F}\,(\nabla\cdot\mathbf{G}) - \mathbf{G}\,(\nabla\cdot\mathbf{F}) + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\,\mathbf{F} - (\mathbf{F}\cdot\nabla)\,\mathbf{G}$

Derivadas segundas
$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) \equiv 0$
$\nabla\times(\nabla\psi) \equiv \mathbf{0}$
$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = \phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi$
$\nabla\cdot(\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi) = \psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi$
$\nabla^2\mathbf{F} = \nabla\,(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})$
$\nabla^2(\phi\psi) = \phi\nabla^2\psi + 2\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \psi\nabla^2\phi$
$\nabla^2(\psi\mathbf{F}) = \mathbf{F}\nabla^2\psi + 2(\nabla\psi\cdot\nabla)\mathbf{F} + \psi\nabla^2\mathbf{F}$
$\nabla^2(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = \mathbf{F}\cdot\nabla^2\mathbf{G} - \mathbf{G}\cdot\nabla^2\mathbf{F} + 2\nabla\cdot((\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} + \mathbf{G}\times\nabla\times\mathbf{F})$

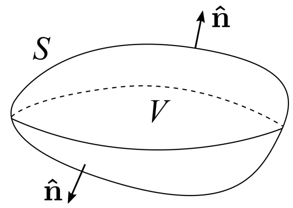
Relaciones especiales	
$\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$	
$\nabla\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$	
$\nabla r = \hat{e}_r$	
$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\hat{e}_r$	
$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\hat{e}_r\right) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r})$	
$\nabla\cdot\left(\mathbf{A}_0\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right) = i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_0\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$	$\mathbf{A}_0, \mathbf{k}$ vectores constantes
$\nabla\times\left(\mathbf{A}_0\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right) = i\,\mathbf{k}\times\mathbf{A}_0\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$	

5. Teoremas integrales

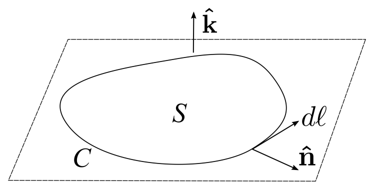
En todos los casos: la superficie S es unión de superficies con vectores normales que varían continuamente. La curva simple C es unión de tramos con tangente continua. $\mathbf{F}$ es un campo C^1.



Curva - superficie



Superficie - volumen



Plano

5.1. Curva - Superficie

S abierta, C es el borde de S.

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS \qquad \text{(Teorema de Stokes)}$$

$$\oint_C \psi\, d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\hat{\mathbf{n}}\times\nabla\psi)\, dS$$

5.2. Superficie - Volumen

S tiene normal $\hat{\mathbf{n}}$ saliente. V es el volumen encerrado por S.

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \int_V (\nabla\cdot\mathbf{F})\, dV \qquad \text{(Teorema de la divergencia)}$$

$$\oint_S \psi\,\hat{\mathbf{n}}\, dS = \int_V \nabla\psi\, dV$$

$$\oint_S (\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{F})\, dS = \int_V (\nabla\times\mathbf{F})\ dV$$

$$\oint_S \psi\,\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dS = \int_V \nabla\cdot(\psi\mathbf{F})\, dV = \int_V [\psi\nabla\cdot\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla\psi]\ dV$$

$$\oint_S \psi\,(\nabla\phi\cdot\hat{\mathbf{n}})\ dS = \int_V \left(\psi\nabla^2\phi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\right) dV \qquad \text{(Primera identidad de Green)}$$

$$\oint_S \mathbf{G}\,(\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}})\, dS = \int_V [\mathbf{G}\,(\nabla\cdot\mathbf{F}) + (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}]\ dV$$

$$\oint_S [(\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)\cdot\hat{\mathbf{n}}]\ dS = \oint_S \left[\psi\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right]\ dS = \int_V \left(\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi\right)\ dV$$

(Segunda identidad de Green)

5.3. Teoremas integrales en el plano

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{k}}\, dS = \int_S (\partial_x F_y - \partial_y F_x)\ dS$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, d\ell = \int_S (\nabla\cdot\mathbf{F})\, dS = \int_S (\partial_x F_x + \partial_y F_y)\, dS$$

5.4. Teorema de Helmholtz (Refs: [1], cap. V)

El teorema de Helmholtz, o teorema fundamental del cálculo vectorial, establece en forma explícita la existencia de potenciales para un campo vectorial.

Teorema de Helmholtz: Sea $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ un campo vectorial C^1 en un volumen V encerrado por la superficie S con normal saliente $\hat{\mathbf{n}}$. El campo $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ se descompone como la suma del gradiente de un potencial escalar $\phi(\mathbf{r})$ más el rotor de un potencial vector $\mathbf{a}(\mathbf{r})$:

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \;+\; \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r})}$$

con:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' - \oint_S \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dS'$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' + \oint_S \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dS'$$

1. La componente:

$$\mathbf{F}_\ell(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \qquad (\nabla \times \mathbf{F}_\ell(\mathbf{r}) = \mathbf{0})$$

se denomina *parte longitudinal o irrotacional de* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

2. La componente:

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) \qquad (\nabla \cdot \mathbf{F}_t(\mathbf{r}) = 0)$$

se denomina *parte transversal o solenoidal de* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

3. Si la superficie S se aleja hasta el infinito y el campo $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ es regular en el infinito las integrales de superficie se anulan y resulta:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV'$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV'$$

de otro modo: *un campo* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ *que es* C^1 *y regular en el infinito está determinado por su divergencia y su rotor.*

6. Funciones trigonométricas y series de Fourier (Refs: [7], cap. 2 y [8], cap. 4)

6.1. Ecuación diferencial

Las funciones trigonométricas satisfacen la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0 \qquad\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

que tiene soluciones periódicas $y(t+T) = y(t)$.

6.2. Base de soluciones

Los conjuntos de funciones:

$$\mathcal{B}_{exp} = \left\{ e^{in\omega_0 t} \;\; : \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \right\}$$

$$\mathcal{B}_{trig} = \{\cos(n\omega_0 t),\; \mathrm{sen}(n\omega_0 t) \;\; : \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

son bases ortogonales de las funciones de cuadrado integrable $L^2\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, con el producto interno y la norma inducida siguientes:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^*(t) g(t)\, dt \qquad\qquad ||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

siendo:

$\left\langle e^{in\omega_0 t}, e^{iq\omega_0 t} \right\rangle = \delta_{nq}$	$\left\langle \begin{Bmatrix} \cos(n\omega_0 t) \\ \mathrm{sen}(n\omega_0 t) \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \cos(q\omega_0 t) \\ \mathrm{sen}(q\omega_0 t) \end{Bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\delta_{nq}$
$\lvert\lvert e^{in\omega_0 t} \rvert\rvert = 1$	$\langle \cos(n\omega_0 t), \mathrm{sen}(q\omega_0 t) \rangle = 0$
	$\lvert\lvert \cos(n\omega_0 t) \rvert\rvert = \lvert\lvert \mathrm{sen}(n\omega_0 t) \rvert\rvert = \frac{1}{\sqrt{2}}$

6.3. Series de Fourier

La serie de Fourier de una función $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{C}$ es el desarrollo ortogonal en alguna de las bases anteriores. Debido a la periodicidad de las bases, f puede estar definida en cualquier intervalo de longitud T. Es usual escribir también las series con el período dado como $T = 2L$.

6.3.1. Serie de Fourier exponencial

Para $f \in L^2\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ es:

$\omega_0 = 2\pi/T$	$T = 2L \to \omega_0 = \pi/L$
$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$	$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t}$
$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega_0 t}\,dt$	$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-in\frac{\pi}{L}t}\,dt$

6.3.2. Serie de Fourier trigonométrica

Para $f \in L^2\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ es:

$\omega_0 = 2\pi/T$		
$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$	$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$	$n \geq 0$
	$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt$	$n \geq 1$

$T = 2L \to \omega_0 = \pi/L$		
$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\frac{\pi}{L}t) + b_n \operatorname{sen}(n\frac{\pi}{L}t)$	$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(n\frac{\pi}{L}t)\,dt$	$n \geq 0$
	$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{L}t)\,dt$	$n \geq 1$

- La relación entre los coeficientes de las series exponencial y trigonométrica es:

$a_0 = c_0$	$c_0 = a_0$
$a_n = c_n + c_{-n}$	$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$
$b_n = i(c_n - c_{-n})$	$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$

- La suma parcial hasta $n = N$ se denota por $S_N(t)$.

6.4. Criterios de convergencia (Refs: [7], cap. 3. [8], cap. 4. [4], cap. 5. [10], cap. 13. [9], cap. 2)

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *seccionalmente continua* si en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ tiene un número finito de discontinuidades de primera especie, esto es:

$$\forall\, a_i \in [a, b], \quad \exists \lim_{t \to a_i^-} f(t) < \infty \quad y \quad \lim_{t \to a_i^+} f(t) < \infty$$

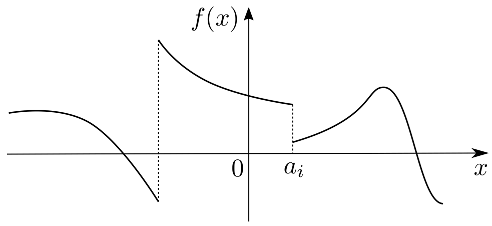


Figura 7: Función seccionalmente continua.

6.4.1. Convergencia en media

Teorema de convergencia en media Si $f \in L^2[-T/2, T/2]$ entonces la serie de Fourier de f converge en media a f:

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |S_N(t) - f(t)|^2 \mathrm{d}t = 0$$

6.4.2. Convergencia puntual

Teorema de Fourier Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica, con f y f' seccionalmente continuas. La serie de Fourier de f converge en todo punto al promedio de los límites laterales de f:

$$\lim_{N \to \infty} S_N(t) = \frac{1}{2} \left[f(t^-) + f(t^+) \right]$$

6.4.3. Convergencia uniforme

Teorema de convergencia uniforme Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica, seccionalmente continua y tal que f' es integrable y absolutamente integrable en un período. La serie de Fourier de f converge uniformemente a f en todo intervalo cerrado que no contenga puntos de discontinuidad de f.

6.5. Operaciones sobre las series de Fourier (Refs: [7], cap. 2. [4], cap. 5. [10], cap. 15)

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periódica con período T y series:

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

Derivación Si f es *continua* y f' es *seccionalmente continua*, la serie de Fourier de f' es:

$$\begin{aligned}S'(t)&=\sum_{-\infty}^{\infty} in\omega_0 c_n e^{in\omega_0 t}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}-n\omega_0 a_n\operatorname{sen}(n\omega_0 t)+n\omega_0 b_n\cos(n\omega_0 t)\end{aligned}$$

Integración Si f es *seccionalmente continua*, para $t_0,t\in\mathbb{R}$:

$$\int_{t_0}^{t} f(u)\mathrm{d}u=c_0(t-t_0)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Gamma_k e^{ik\omega_0 t}$$

$$\Gamma_k=\begin{cases}-\sum_{l\neq 0}\frac{c_l}{il\omega_0}e^{il\omega_0 t_0} & k=0\\ \frac{c_k}{ik\omega_0} & k\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t} f(u)\mathrm{d}u=\frac{a_0}{2}(t-t_0)+\Gamma_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_0 k}\left[a_k\operatorname{sen}(k\omega_0 t)-b_k\cos(k\omega_0 t)\right]$$

$$\Gamma_0=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_0 l}\left[-a_l\operatorname{sen}(l\omega_0 t_0)+b_l\cos(l\omega_0 t_0)\right]$$

- Las series en el lado derecho convergen uniformemente a la integral de f y no son en general la serie de Fourier de una función.
- Con $t_0=0$:

$$\begin{aligned}\int_0^t f(u)\mathrm{d}u&=\frac{a_0}{2}t+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\omega_0}\left[a_k\operatorname{sen}(k\omega_0 t)-b_k\left(1-\cos(k\omega_0 t)\right)\right]\\&=c_0 t+\sum_{k\neq 0}\frac{c_k}{ik\omega_0}\left(e^{ik\omega_0 t}-1\right)\end{aligned}$$

- Con $t_0=-T/2$:

$$\begin{aligned}\int_0^t f(u)\mathrm{d}u&=\frac{a_0}{2}(t+T/2)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\omega_0}\left[a_k\operatorname{sen}(k\omega_0 t)+b_k\left((-1)^k-\cos(k\omega_0 t)\right)\right]\\&=c_0(t+T/2)+\sum_{k\neq 0}\frac{c_k}{ik\omega_0}\left(e^{ik\omega_0 t}-(-1)^k\right)\end{aligned}$$

6.6. Propiedades de los coeficientes

La tabla resume algunas propiedades útiles de los coeficientes de Fourier c_n. Las funciones $f(t)$ y $g(t)$ son periódicas con período T.

Propiedad	Función	Coeficiente de la serie
Linealidad	$f'(t) = Af(t) + Bg(t)$	$c'_n = Ac_n(f) + Bc_n(g)$
Desplazamiento en t	$f'(t) = f(t - t_0)$	$c'_n = e^{-in\omega_0 t_0} c_n$
Desplazamiento en n	$f'(t) = e^{iM\omega_0 t} f(t)$	$c'_n = c_{n-M}$
Cambio de escala	$f'(t) = f(\alpha t)$ $(T' = T/\alpha)$	$c'_n = c_n$ $(\omega'_0 = \alpha\omega_0)$
Derivación	$f'(t) = \frac{df}{dt}(t)$	$c'_n = in\omega_0 c_n$
Inversión en t	$f'(t) = f(-t)$	$c'_n = c_{-n}$
Conjugación	$f'(t) = f^*(t)$	$c'_n = c^*_{-n}$
	$f(t)$ real	$c_n = c^*_{-n}$
	$f(t)$ real par	$c_n = c_{-n}$ real
	$f(t)$ real impar	$c_n = -c_{-n}$ imaginario

6.7. Identidad de Parseval (Refs: [7], cap. 2. [9], cap. 2. [10], cap. 11)

Si $f, g \in L^2\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ con series de Fourier:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\omega_0 t} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\omega_0 t) + b_n(f)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)$$
$$g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(g) e^{in\omega_0 t} = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g)\cos(n\omega_0 t) + b_n(g)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)$$

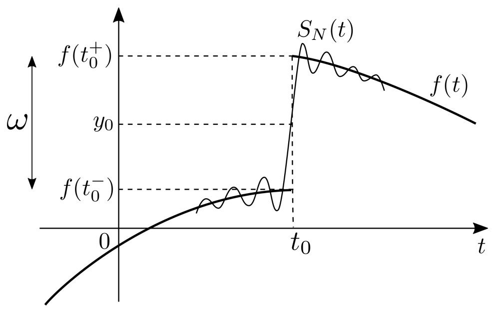
se verifican las relaciones ($a \in \mathbb{R}$ cualquiera):

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f^*(t)g(t)\,\mathrm{dt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^*(f)c_n(g) = \frac{a_0^*(f)a_0(g)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^*(f)a_n(g) + b_n^*(f)b_n(g)\right)$$

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(t)|^2\,\mathrm{dt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

6.8. Fenómeno de Gibbs (Refs: [8], cap. 4. [9], cap. 2)

El fenómeno de Gibbs es es el comportamiento característico oscilatorio de las sumas parciales $S_N(t)$ de la serie de Fourier de una función $f(t)$ cerca de una discontinuidad de la función $f(t)$.



1. La abscisa y pertenece al *intervalo de Gibbs* de un punto de salto t_0 si existen sucesiones $\{N_k\}$ (enteros) y $\{t_k\}$ (reales) con $t_k \to t_0$, tales que:

$$\lim_{k\to\infty} S_{N_k}(t_k) = y$$

El intervalo de Gibbs contiene las oscilaciones de S_N cerca de la discontinuidad t_0.

2. Si en t_0:

$$\omega = f(t_0^+) - f(t_0^-) \qquad \text{(salto)}$$
$$y_0 = \frac{1}{2}\left[f(t_0^+) + f(t_0^-)\right] \qquad \text{(punto medio)}$$

Se puede demostrar que el intervalo de Gibbs está dado por:

$$y/ \qquad |y - y_0| \;\leq\; \frac{\omega}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{sen}(u)}{u}\mathrm{d}u \;\simeq\; \omega\cdot(0{,}58948987\ldots)$$

Los extremos del intervalo de Gibbs son:

$$y_M = f(t_0^+) + \omega\cdot(0{,}08948987\ldots)$$
$$y_m = f(t_0^-) - \omega\cdot(0{,}08948987\ldots)$$

De otro modo, los extremos de oscilación de la serie en t_0 sobrepasan los valores izquierdo y derecho de $f(t)$ en un 9 % de ω aproximadamente.

3. Las oscilaciones de Gibbs pueden evitarse sumando la serie según el esquema de Cesàro[1].

[1] Ver [7] p.81, [8] p. 20, p.93

7. Transformada de Fourier (Refs: [9], cap. 7)

Para asegurar la existencia de la transformada de Fourier y ciertas propiedades deseables, es necesario restringir las funciones a un conjunto con alguna característica conveniente. Aquí se utilizará el espacio de funciones L^1, definido por:

$$L^1 = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} / \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty \right\}$$

El espacio L^1 es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$:

$$f(t) \in L^1 \;\Rightarrow\; \lambda f(t) \in L^1, \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$
$$f(t), g(t) \in L^1 \;\Rightarrow\; f(t) + g(t) \in L^1$$

7.1. Transformada de Fourier en una dimensión

1. Para $f(t) \in L^1$ existe siempre la **transformada de Fourier**:

$$\boxed{F(\nu) \equiv \mathcal{F}[f](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt}$$

- La transformada $F(\nu)$ es una función uniformemente continua de ν.
- $F(\nu) \to 0$ si $|\nu| \to \infty$ (Lema de Riemann-Lebesgue).
- La variable ν es una *frecuencia* y sus unidades son: $[\nu] = 1/[t]$.
- $F(\nu)$ tiene unidades: $[F(\nu)] = [f(t)] \times [t]$

2. El **teorema de inversión de Fourier** establece que si la función $F(\nu)$ es L^1 se puede recuperar $f(t)$ mediante la *fórmula de inversión*:

$$\boxed{f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu}$$

y $f(t)$ es una función continua con $f(t) \to 0$ si $|t| \to \infty$.

· Un corolario importante del teorema de inversión es que la igualdad de dos transformadas implica la igualdad de las funciones:

$$\boxed{F(\nu) = G(\nu) \quad \Rightarrow \quad f(t) = g(t)}$$

3. En términos de la **frecuencia angular** $\omega = 2\pi\nu$ la transformada de Fourier es:

$$\boxed{F(\omega) \equiv \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt}$$

y la inversa:

$$\boxed{f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega}$$

7.1.1. Propiedades

1. En la tabla de propiedades $f, g \in L^1$ y F, G son sus transformadas. Se asume que las derivadas y productos de funciones que aparecen están en L^1.

Linealidad	$\mathcal{F}[\lambda f + \mu g](\nu) = \lambda F(\nu) + \mu G(\nu)$	$\mathcal{F}[\lambda f + \mu g](\omega) = \lambda F(\omega) + \mu G(\omega)$
Derivación en t	$\mathcal{F}\left[\frac{d^k f}{dt^k}\right](\nu) = (i2\pi\nu)^k F(\nu)$	$\mathcal{F}\left[\frac{d^k f}{dt^k}\right](\omega) = (i\omega)^k F(\omega)$
Derivación en ν (ω)	$\mathcal{F}[(-i2\pi t)^k f](\nu) = \frac{d^k F}{d\nu^k}(\nu)$	$\mathcal{F}[(-it)^k f](\omega) = \frac{d^k F}{d\omega^k}(\omega)$
Desplazamiento en t	$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\nu) = e^{-i2\pi t_0 \nu} F(\nu)$	$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\nu) = e^{-i\omega t_0} F(\omega)$
Desplazamiento en ν (ω)	$F(\nu - \nu_0) = \mathcal{F}[e^{i2\pi\nu_0 t} f(t)]$	$F(\omega - \omega_0) = \mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)]$
Cambio de escala	$\mathcal{F}[f(at)](\nu) = \frac{1}{\lvert a\rvert} F(\frac{\nu}{a})$	$\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{\lvert a\rvert} F(\frac{\omega}{a})$
Inversión temporal	$\mathcal{F}[f(-t)](\nu) = F(-\nu)$	$\mathcal{F}[f(-t)](\omega) = F(-\omega)$
Conjugación	$\mathcal{F}[f^*(t)](\nu) = F^*(-\nu)$	$\mathcal{F}[f^*(t)](\omega) = F^*(-\omega)$
$f(t)$ real	$F^*(\nu) = F(-\nu)$	$F^*(\omega) = F(-\omega)$
$f(t)$ real y par	F real y par	
$f(t)$ real e impar	F imaginaria e impar	

Obs.: La propiedad de derivación indica que si $\frac{d^k f}{dt^k} \in L^1$, su transformada F cae más rápido que ν^k, puesto que debe ser $\nu^k F(\nu) \to 0$ cuando $|\nu| \to \infty$. Intuitivamente, *cuanto más suve es la función f, más rápido va a cero su transformada en el infinito.*

2. Aplicación sucesiva de la transformada de Fourier Si $\mathcal{F}^n$ denota aplicar n veces la transformada y $f \in L^1$, se verifica:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^2[f](t) &= f(-t) \\
\mathcal{F}^3[f](u) &= \mathcal{F}^{-1}[f](u) \\
\mathcal{F}^4[f](t) &= f(t)
\end{aligned}$$

7.1.2. Teorema de Plancherel

El teorema de Plancherel es el análogo para la transformada de Fourier del teorema de Parseval para series. Se supone que $f \in L^1$ y $g \in L^1$ son de cuadrado integrable ($f, g \in L^2$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\nu)G(\nu)d\nu$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2d\nu$$

Las relaciones son idénticas para la transformada en ω definida.

7.1.3. Convolución

El *producto de convolución* entre dos funciones $f, g \in L^1$ se define como:

$$\boxed{f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du}$$

La convolución cumple las reglas algebraicas del producto ordinario, pero la regla de derivación es distinta:

Reglas del producto de convolución
$f * (ag + bh)(t) = af * g(t) + bf * h(t)$
$f * g(t) = g * f(t)$
$f * (g * h)(t) = (f * g) * h(t)$
$\frac{d}{dt}\left(f * g\right)(t) = \left(\frac{df}{dt} * g\right)(t) = \left(f * \frac{dg}{dt}\right)(t)$

El producto de convolución se traduce en el producto ordinario de las transformadas, con una constante multiplicativa que depende de la definición usada:

Producto de convolución en el espacio de Fourier
$\mathcal{F}[f * g](\nu) = F(\nu)G(\nu)$
$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \sqrt{2\pi}F(\omega)G(\omega)$

7.1.4. Relación de incertidumbre

La *dispersión* de una función $f(t)$ o su transformada $F(\nu)$ en torno a valores t_0 o ν_0 se define (suponiendo que las integrales existen) como:

$$\Delta_{t_0} f = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(t-t_0)^2|f(t)|^2dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt} \qquad \Delta_{\nu_0} F = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(\nu-\nu_0)^2|F(\nu)|^2d\nu}{\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\nu)|^2d\nu}$$

con una expresión análoga para $\Delta_{\omega_0} F$. La relación de incertidumbre establece un vínculo entre las dispersiones.

$$\Delta_{t_0} f \, \Delta_{\nu_0} F \ \geq \ \frac{1}{16\pi^2} \qquad\qquad \Delta_{t_0} f \, \Delta_{\omega_0} F \ \geq \ \frac{1}{4}$$

- Obs.: Los puntos t_0 y ν_0 (ω_0) son arbitrarios.

- Obs.: La función gaussiana cumple la igualdad en el producto de dispersiones (es de *incertidumbre mínima*):

$$f(t) = e^{-ct^2} \quad \rightarrow \quad F(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-\frac{\pi^2 \nu^2}{c}} \quad \rightarrow \quad \Delta_{t_0} f \, \Delta_{\nu_0} F \ = \ \frac{1}{16\pi^2}$$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2c}} e^{-\frac{\omega^2}{2c}} \quad \rightarrow \quad \Delta_{t_0} f \, \Delta_{\omega_0} F \ = \ \frac{1}{4}$$

7.2. Transformada de Fourier en dimensiones mayores (Refs: [9], cap. 7)

Los puntos de $\mathbb{R}^n$ se denotan como $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (en la gran mayoría de las aplicaciones $n = 2$ o $n = 3$). Para funciones de n variables reales $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ el espacio de funciones L^1 se define igualmente que para el caso unidimensional, salvo que la integral es sobre todo $\mathbb{R}^n$:

$$L^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} / \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| \, d^n\mathbf{x} < \infty \right\}$$

1. La transformada de Fourier de $f(\mathbf{x}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se escribe en general en términos del *vector de onda* $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ (análogo de la frecuencia angular en $n = 1$):

$$\boxed{F(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{F}[f](\mathbf{k}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \, e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}} \, d^n\mathbf{x}}$$

2. Teorema de inversión de Fourier. Si $F(\mathbf{k}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\boxed{f(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{F}^{-1}[F](\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(\mathbf{k}) \, e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}} \, d^n\mathbf{k}}$$

· La igualdad de dos transformadas implica la igualdad de las funciones:

$$\boxed{F(\mathbf{k}) = G(\mathbf{k}) \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})}$$

7.2.1. Propiedades

En la tabla de propiedades $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y F, G son sus transformadas. Se asume que las derivadas y productos de funciones que aparecen están en L^1.

Linealidad	$\mathcal{F}[\lambda f + \mu g](\mathbf{k}) = \lambda F(\mathbf{k}) + \mu G(\mathbf{k})$
Derivación en x_j	$\mathcal{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right](\mathbf{k}) = (ik_j)F(\mathbf{k})$
Derivación en k_j	$\mathcal{F}[(-ix_j)f](\mathbf{k}) = \frac{\partial F}{\partial k_j}(\mathbf{k})$
Desplazamiento en $\mathbf{x}$	$\mathcal{F}[f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)](\mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x_0}}F(\mathbf{k})$
Desplazamiento en $\mathbf{k}$	$F(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) = \mathcal{F}[e^{i\mathbf{k}_0.\mathbf{x}}f(\mathbf{x})]$
Cambio de escala (A matriz $n \times n$)	$\mathcal{F}[f(A\mathbf{x})](\mathbf{k}) = \dfrac{1}{\lvert\det A\rvert}F((A^{-1})^t\mathbf{k})$
Rotación de $\mathbf{x}$ (R rotación en $\mathbb{R}^n$: $RR^t = R^tR = I$)	$\mathcal{F}[f(R\mathbf{x})](\mathbf{k}) = F(R\mathbf{k})$
Conjugación	$\mathcal{F}[f^*(\mathbf{x})](\mathbf{k}) = F^*(-\mathbf{k})$
$f(\mathbf{x})$ real	$F^*(\mathbf{k}) = F(-\mathbf{k})$

7.2.2. Teorema de Plancherel

En n dimensiones, con la definición dada para la transformada de Fourier:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})g^*(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} F(\mathbf{k})G^*(\mathbf{k})\, d^n\mathbf{x}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2\, d^n\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} |F(\mathbf{k})|^2\, d^n\mathbf{x}$$

7.2.3. Convolución

En $\mathbb{R}^n$ el producto de convolución entre dos funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es:

$$\boxed{f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})\, d^n\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, d^n\mathbf{y}}$$

Se cumplen las mismas reglas de producto que para el caso unidimensional. La regla de derivación involucra derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f * g)(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} * g\right)(\mathbf{x}) = \left(f * \frac{\partial g}{\partial x_j}\right)(\mathbf{x})$$

La transformada del producto de convolución es: $\boxed{\mathcal{F}[f * g](\mathbf{k}) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n F(\mathbf{k})G(\mathbf{k})}$.

7.3. Transformada de Fourier de seno y coseno

La transformada de Fourier de una función $f(t)$ y la fórmula de inversión pueden ser separadas en sus partes real e imaginaria:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \cos(\omega t)\, dt - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \operatorname{sen}(\omega t)\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, \cos(\omega t)\, d\omega + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, \operatorname{sen}(\omega t)\, d\omega$$

1. Según la tabla de propiedades, $f(t)$ y $F(\omega)$ tienen la misma paridad. Luego:

$f(t) = f(-t) \to F(\omega) = F(-\omega)$	$f(t) = -f(-t) \to F(\omega) = -F(-\omega)$
$F(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)\, \cos(\omega t)\, dt$	$F(\omega) = -i \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)\, \operatorname{sen}(\omega t)\, dt$
$f(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} F(\omega)\, \cos(\omega t)\, d\omega$	$f(t) = i \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} F(\omega)\, \operatorname{sen}(\omega t)\, d\omega$

2. Definición: Para $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ las transformadas de seno y coseno son definidas como:

$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)\, \cos(\omega t)\, dt$	$\omega \geq 0$	$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)\, \operatorname{sen}(\omega t)\, dt$	$\omega \geq 0$
$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} F(\omega)\, \cos(\omega t)\, d\omega$		$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} F(\omega)\, \operatorname{sen}(\omega t)\, d\omega$	

3. Cada una de ellas permite reconstruir $f(t)$ en $0 \leq t < \infty$ y coinciden respectivamente con las transformadas de Fourier de las extensiones par e impar de $f(t)$ para $t < 0$.

4. Las expresiones de las transformadas y sus inversas son totalmente simétricas.

5. Derivadas: Las transformadas de las derivadas de $f(t)$ cumplen las reglas:

$\mathcal{F}_c[f'](\omega) = \omega F_s(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$	$\mathcal{F}_s[f'](\omega) = -\omega F_c(\omega)$
$\mathcal{F}_c[f''](\omega) = -\omega^2 F_c(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$	$\mathcal{F}_s[f''](\omega) = -\omega^2 F_s(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$

8. Funciones especiales

8.1. Factoriales y función Gama (Refs: [4], cap. 4)

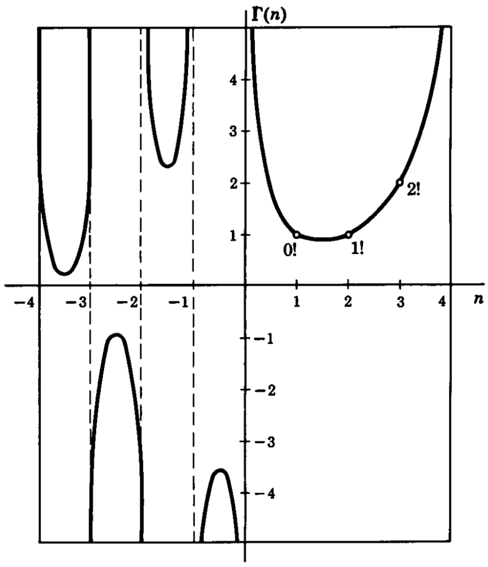
8.1.1. Factoriales dobles

$$(2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots 5\cdot 3\cdot 1 = (2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$
$$(2n)(2n-2)(2n-4)\dots 6\cdot 4\cdot 2 = (2n)!! = 2^n n!$$

8.1.2. Función Gama

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

(converge absolutamente para $x > 0$)



$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$	$x > 0$
$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} x\pi}$	$x > 0, x \notin \mathbb{Z}$
$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$	
$\Gamma(\frac{1}{2}+n) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$	$n > 0$ entero
$\Gamma(n+1) = n!$	$n > 0$ entero

8.2. Funciones de Bessel (Refs: [6], cap. 3, [4], cap. 4, [18])

8.2.1. Ecuación de Bessel - Base de soluciones

1. Ecuación de Bessel de orden p ($p \in \mathbb{R}$):

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2) y = x \frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx} \right) + (x^2 - p^2) y = 0$$

con $y = u/\sqrt{x}$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(1 - \frac{p^2 - 1/4}{x^2} \right) u = 0$$

2. Una solución es el desarrollo en serie:

$$\boxed{J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+p+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m+p}}$$ **Función de Bessel de primera especie y orden p**

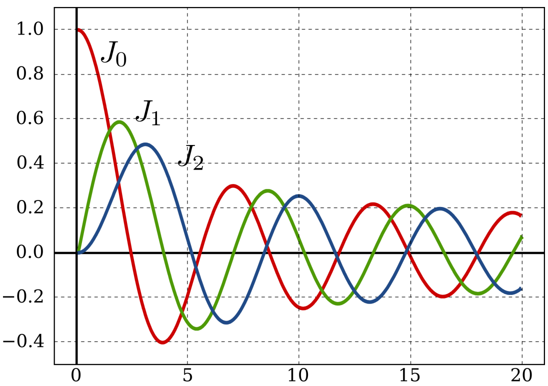
$$\begin{cases} \cdot\ p \text{ no entero: } \{J_p(x), J_{-p}(x)\} \text{ es LI} \qquad \rightarrow \qquad y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x) \\ \cdot\ p = n \text{ entero: se cumple } J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \text{ (no son LI)} \end{cases}$$

Se define:

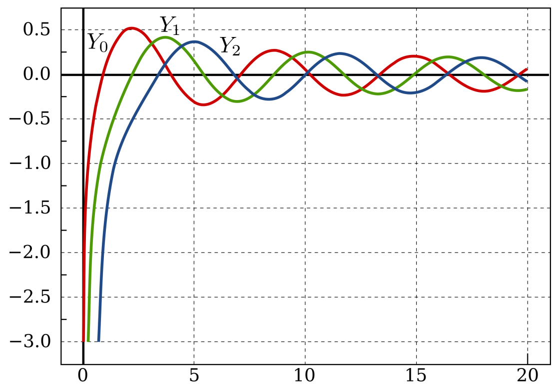
$$\boxed{Y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen}(p\pi)}}$$ **Función de Bessel de segunda especie y orden p**

El conjunto $\{J_p(x), Y_p(x)\}$ es LI $\forall p$. Se usa esta base en general:

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x) \qquad\qquad p \geq 0$$



(a) Funciones de Bessel de primera especie.



(b) Funciones de Bessel de segunda especie.

3. Casos notables:

$$J_0(0) = 1 \qquad\qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$J_0'(0) = 0 \qquad\qquad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x$$

$$J_{p>0}(0) = 0$$

8.2.2. Ecuación modificada de Bessel

1.

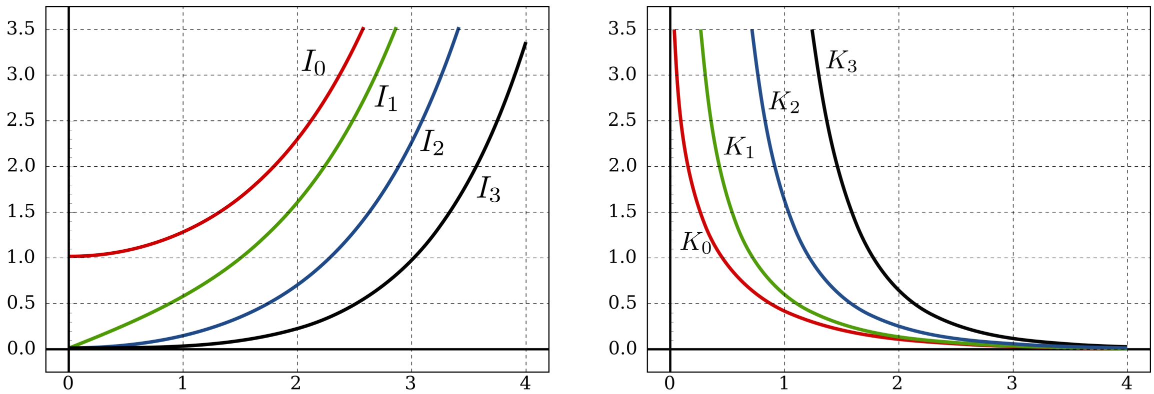
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+p^2)y=0$$

2. Base de soluciones reales:

$$\begin{cases} I_p(x)=\dfrac{1}{i^p}J_p(ix) & \textbf{Función modificada de Bessel de primera especie y orden p} \\ \\ K_p(x)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_{-p}(x)-I_p(x)}{\operatorname{sen}(p\pi)} & \textbf{Función modificada de Bessel de segunda especie y orden p} \end{cases}$$

Cualquier solución y de la ecuación modificada puede escribirse como:

$$y=c_1I_p(x)+c_2K_p(x) \qquad\qquad p\geq 0$$



(a) Funciones modificadas de primera especie.

(b) Funciones modificadas de segunda especie.

3. Casos notables:

$$I_0(0)=1 \qquad\qquad I_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{senh}x$$

$$I_0'(0)=0 \qquad\qquad I_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cosh x$$

$$I_{p>0}(0)=0$$

8.2.3. Funciones de Hankel

$$\begin{cases} H_p^{(1)}(x)=J_p(x)+iY_p(x) & \textbf{Primera especie y orden p} \\ H_p^{(2)}(x)=J_p(x)-iY_p(x) & \textbf{Segunda especie y orden p} \end{cases}$$

- Forman una base de soluciones complejas de la ecuación de orden p:

$$y=c_1H_p^{(1)}(x)+c_2H_p^{(2)}(x) \qquad\qquad p\geq 0$$

- Son útiles por su forma asintótica en $x\to\infty$.

8.2.4. Formas asintóticas

	$x \to 0$	$x \to \infty$
Funciones de Bessel	$J_p(x) \sim \dfrac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ $Y_p(x) \sim -\dfrac{\Gamma(p)}{\pi} \left(\dfrac{2}{x}\right)^2 \quad (p \neq 0)$ $Y_0 \sim \dfrac{2}{\pi} \ln x$	$J_p(x) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}p - \dfrac{\pi}{4}\right)$ $Y_p(x) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}p - \dfrac{\pi}{4}\right)$
Funciones de Bessel modificadas	$I_p(x) \sim \dfrac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ $K_p(x) \sim \dfrac{1}{2\Gamma(p)} \left(\dfrac{2}{x}\right)^2 \quad (p \neq 0)$ $K_0 \sim -\dfrac{2}{\pi} \ln x$	$I_p(x) \sim \sqrt{\dfrac{1}{2\pi x}} e^x$ $K_p(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} e^{-x}$
Funciones de Hankel		$H_p^{(1)}(x) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}p - \frac{\pi}{4}\right)}$ $H_p^{(2)}(x) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}p - \frac{\pi}{4}\right)}$

8.2.5. Relaciones de recurrencia

Diferenciales	Algebraicas
$\dfrac{d}{dx}\left[x^p y_p(kx)\right] = kx^p y_{p-1}(kx)$ $\dfrac{d}{dx}\left[x^{-p} y_p(kx)\right] = -kx^{-p} y_{p+1}(kx)$ $(y = J, Y, H^{(1)}, H^{(2)})$	$y_{p+1}(kx) = \dfrac{2p}{kx} y_p(kx) - y_{p-1}(kx)$ $(y = J, Y, H^{(1)}, H^{(2)})$
$\dfrac{d}{dx}\left[x^p K_p(kx)\right] = -kx^p K_{p-1}(kx)$ $\dfrac{d}{dx}\left[x^{-p} I_p(kx)\right] = kx^{-p} I_{p+1}(kx)$	$I_{p+1}(kx) = -\dfrac{2p}{kx} I_p(kx) - I_{p-1}(kx)$ $K_{p+1}(kx) = \dfrac{2p}{kx} K_p(kx) - K_{p-1}(kx)$

con $k = 1, p = n - 1/2$, n entero:

$$J_{n+1/2}(x) = \frac{2n-1}{x} J_{n-1/2}(x) - J_{n-3/2}(x)$$
$$I_{n+1/2}(x) = -\frac{2n-1}{x} I_{n-1/2}(x) + I_{n-3/2}(x)$$

8.2.6. Desarrollo de Fourier-Bessel (Refs: [4], cap. 5. [11], cap. 8, [12], cap. 8)

1. En la solución de la ecuación de Laplace por separación de variables se encuentra la ecuación de Bessel en forma paramétrica:

$$\rho^2 \frac{d^2 f}{d\rho^2} + \rho \frac{df}{d\rho} + (k^2\rho^2 - p^2) f = 0 \qquad\qquad (k > 0 \text{ parámetro})$$

En un intervalo $0 \leq \rho \leq b$, con condiciones de borde en $\rho = 0$ y $\rho = b$ para $f(\rho)$.

2. La solución general de la ecuación paramétrica de Bessel es:

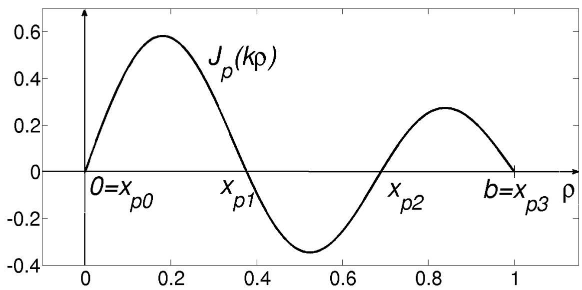
$$f_k(\rho) = c_1 J_p(k\rho) + c_2 Y_p(k\rho)$$

3. Condiciones de borde:

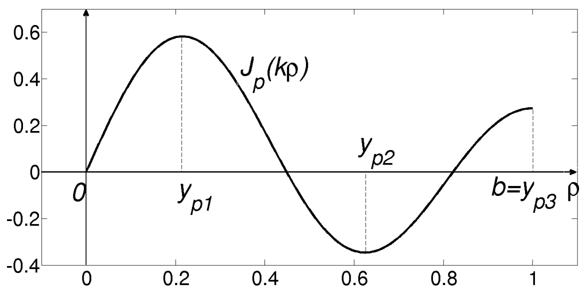
- $\rho = 0$: $\quad f(0) < \infty \quad \rightarrow \quad f_k = c_1 J_p(k\rho) \qquad (p \geq 0)$
- $\rho = b$ determinan los valores posibles k_n del parámetro k:

1)	$f(b) = 0$	$k_n b = x_{pn}$	n-ésimo cero de J_p
2)	$f'(b) = 0$	$k_n b = y_{pn}$	n-ésimo cero de J'_p
3)	$\mu_1 f(b) + \mu_2 f'(b) = 0$	$k_n b = \alpha_{pn}$	n-ésimo cero de $\mu_1 J_p(\alpha) + \mu_2 \frac{\alpha}{b} J'_p(\alpha)$

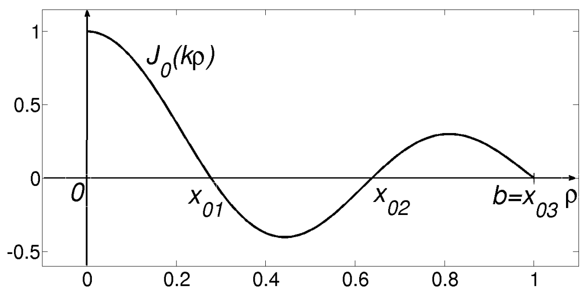
- Notación para las raíces:
  · $n = 0$ para las raíces en $\rho = 0$.
  · $n > 0$ para las raíces con $\rho > 0$.
  · Sólo están presentes las raíces en $\rho = 0$ para $p > 0$ con CB1 y para $p = 0$ con CB2.



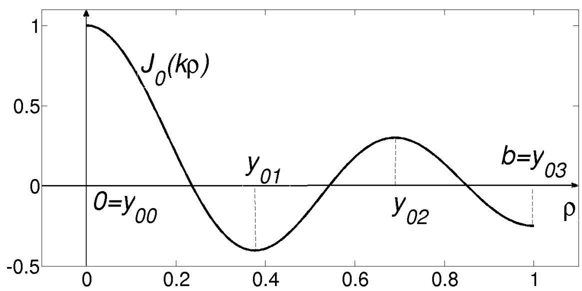
(a) $p > 0, CB1$



(b) $p > 0, CB2$



(a) $p = 0, CB1$



(b) $p = 0, CB2$

4. Para p *fijo*, las funciones de los conjuntos:

$$\{J_p(k_n\rho): \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\} \qquad (k_n \text{ dependientes de las CB})$$

son ortogonales con el producto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^b \rho\, f(\rho)\, g(\rho)\, d\rho$$

siendo:

$$\int_0^b \rho\, J_p(k_m\rho)\, J_p(k_n\rho)\, d\rho = I_{pn}\delta_{mn}$$
$$I_{pn} = ||J_p(k_n\rho)||^2$$

Estos conjuntos forman bases de espacios de funciones $f(\rho)$ que cumplan alguna hipótesis de suavidad.
Dado un $p \geq 0$, la serie y coeficientes de Fourier-Bessel de una función $f(\rho)$ son definidos según:

$$\boxed{S_f(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_p(k_n\rho) \qquad c_n = \frac{1}{I_{pn}} \int_0^b \rho\, f(\rho)\, J_p(k_n\rho)\, d\rho}$$

8.2.7. Desarrollos para las distintas CB

1. CB1: $\quad J_p(k_n b) = 0 \;\to\; k_n = \frac{x_{pn}}{b}$

- En las relaciones de ortogonalidad

$$I_{pn} = \frac{b^2}{2} J_{p+1}^2(x_{pn})$$

- Para $p > 0$ la primera raíz es cero $x_{p0} = 0$ y para $p = 0$ la primera raíz es positiva $x_{01} > 0$. La serie nunca tiene el término $n = 0$:

CB1, $p \geq 0$
$S_f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_p(k_n\rho) \qquad c_n = \frac{1}{I_{pn}} \int_0^b \rho\, f(\rho)\, J_p(k_n\rho)\, d\rho \qquad k_n = \frac{x_{pn}}{b}$

2. CB2: $J_p'(k_n b) = 0 \;\rightarrow\; k_n = \frac{y_{pn}}{b}$

- $p = 0$: La primera raíz está en cero: $y_{00} = 0$.

$$\begin{cases} I_{00} = ||J_0(0)||^2 = \int_0^b \rho\, d\rho = \frac{b^2}{2} & n = 0 \\ I_{0n} = \frac{b^2}{2} J_1^2(y_{0n}) & n \geq 1 \end{cases}$$

En este caso la serie tiene el término $n = 0$ y es la constante c_0 ($J_0(0) = 1$):

CB2, $p = 0$
$S_f(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_0(k_n\rho) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(k_n\rho)$ $c_0 = \frac{2}{b^2}\int_0^b \rho f(\rho) d\rho$ $c_{n\geq 1} = \frac{1}{I_{0n}}\int_0^b \rho f(\rho) J_0(k_n\rho) d\rho$ $k_n = \frac{y_{0n}}{b}$

- $p > 0$: La primera raíz es positiva: $y_{p1} > 0$.

$$I_{pn} = \frac{b^2}{2}\left[1 - \left(\frac{p}{y_{pn}}\right)^2\right] J_{p+1}^2(y_{pn})$$

La serie no tiene el término $n = 0$ ($J_{p>0}(0) = 0$):

CB2, $p > 0$
$S_f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_p(k_n\rho)$ $c_{n\geq 1} = \frac{1}{I_{pn}}\int_0^b \rho f(\rho) J_p(k_n\rho) d\rho$ $k_n = \frac{y_{pn}}{b}$

8.2.8. Convergencia de la serie de Fourier-Bessel

Es posible demostrar ([5], sec. 4.8-4.9) que el desarrollo de Fourier-Bessel de (8.2.6) converge bajo las mismas condiciones que las series de Fourier.

8.2.9. Primeros ceros de las funciones de Bessel

n	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2,4048	3,8317	5,1356	6,3802	7,5883	8,7715
2	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386
3	8,6537	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725	15,7002
4	11,7915	13,3237	14,7960	16,2235	17,6160	18,9801
5	14,9309	16,4706	17,9598	19,4094	20,8269	22,2178

n	$J'_0(x)$	$J'_1(x)$	$J'_2(x)$	$J'_3(x)$	$J'_4(x)$	$J'_5(x)$
1	3,8317	1,8412	3,0542	4,2012	5,3175	6,4156
2	7,0156	5,3314	6,7061	8,0152	9,2824	10,5199
3	10,1735	8,5363	9,9695	11,3459	12,6819	13,9872
4	13,3237	11,7060	13,1704	14,5858	15,9641	17,3128
5	16,4706	14,8636	16,3475	17,7887	19,1960	20,5755

8.3. Funciones de Legendre (Refs: [4], cap. 4, [6], cap. 3)

8.3.1. Ecuación diferencial de Legendre

1.

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]+\ell(\ell+1)y=0$$

con $x=\cos\theta$:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dy}{d\theta}\right)+\ell(\ell+1)y=0$$

2. Soluciones

Dos soluciones LI convergentes para $|x|<1$ son:

$$v_\ell(x)=x-\frac{(\ell-1)(\ell+2)}{3!}x^3+\frac{(\ell-1)(\ell-3)(\ell+2)(\ell+4)}{5!}x^5-\dots$$
$$u_\ell(x)=1-\frac{\ell(\ell+1)}{2!}x^2+\frac{\ell(\ell-2)(\ell+1)(\ell+3)}{4!}x^4-\dots$$

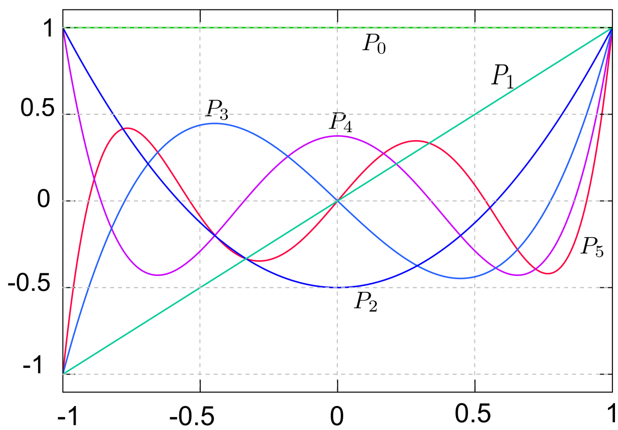
Se define a partir de estas:

$$P_\ell(x):=\begin{cases}\frac{v_\ell(x)}{v_\ell(1)} & \ell \text{ impar}\\ \frac{u_\ell(x)}{u_\ell(1)} & \ell \text{ par}\end{cases}\quad \text{(Polinomios de grado } \ell) \qquad Q_\ell(x):=\begin{cases}-v_\ell(1)u_\ell(x) & \ell \text{ impar}\\ u_\ell(1)v_\ell(x) & \ell \text{ par}\end{cases}\quad \text{(Series infinitas)}$$

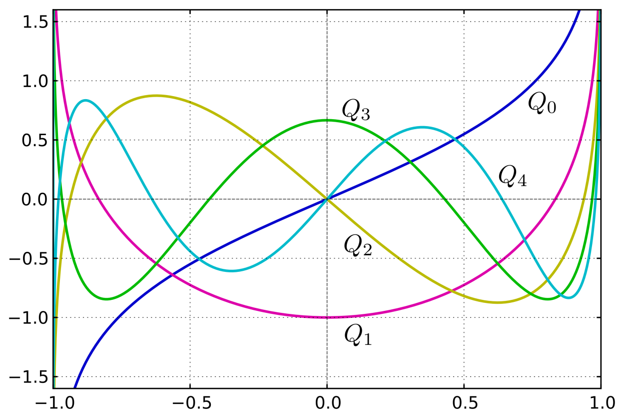
La solución general es: $\boxed{y_\ell(x)=c_1P_\ell(x)+c_2Q_\ell(x)}$

$P_\ell(x)$: **Polinomio de Legendre de orden ℓ**

$Q_\ell(x)$: **Función de Legendre de segundo tipo y orden ℓ**



(a) Polinomios de Legendre



(b) Funciones de Legendre de segundo tipo

Comportamiento en $x=\pm1$:

$$|P_\ell(x=\pm1)|=1$$
$$Q_\ell(x=\pm1)=\infty$$

$\rightarrow$ **$P_\ell(x)$ son las únicas soluciones finitas en $x=\pm1$**

8.3.2. Polinomios de Legendre

1. Formas explícitas

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell}\sum_{k=0}^{\ell}(C_k^\ell)^2(x-1)^{\ell-k}(x+1)^k = \frac{1}{2^\ell}\sum_{k=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor}(-1)^k C_k^\ell C_\ell^{2(\ell-k)} x^{\ell-2k}$$

$\lfloor u \rfloor$ denota la función piso: mayor de los enteros menores o iguales a u.

2. Fórmula de Rodrigues

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell$$

3. Función generatriz

$$G(x,h) = \frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)h^\ell$$

4. Primeros polinomios

ℓ	$P_\ell(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$
3	$\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$
4	$\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$
5	$\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)$
6	$\frac{1}{16}\left(231x^6-315x^4+105x^2-5\right)$
7	$\frac{1}{16}\left(429x^7-693x^5+315x^3-35x\right)$
8	$\frac{1}{128}\left(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35\right)$
9	$\frac{1}{128}\left(12155x^9-25740x^7+18018x^5-4620x^3+315x\right)$
10	$\frac{1}{256}\left(46189x^{10}-109395x^8+90090x^6-30030x^4+3465x^2-63\right)$

5. En términos de $x = \cos\theta$ los polinomios pueden ser expresados en potencias de $\cos\theta$. Usando las relaciones (5) se pueden escribir en términos de cosenos de ángulos múltiples:

ℓ	$P_\ell(\cos\theta)$
0	1
1	$\cos\theta$
2	$\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1)$
3	$\frac{1}{8}(5\cos 3\theta+3\cos\theta)$
4	$\frac{1}{64}(35\cos 4\theta+20\cos 2\theta+9)$
5	$\frac{1}{128}(63\cos 5\theta+35\cos 3\theta+30\cos\theta)$
6	$\frac{1}{512}(231\cos 6\theta+126\cos 4\theta+105\cos 2\theta+50)$
7	$\frac{1}{1024}(429\cos 7\theta+231\cos 5\theta+189\cos 3\theta+175\cos\theta)$
8	$\frac{1}{2^{14}}(6435\cos 8\theta+3432\cos 6\theta+2772\cos 4\theta+2520\cos 2\theta+1225)$

6. Propiedades y valores notables

Propiedades		Valores notables
$P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$	(paridad)	$P_\ell(1) = 1 \qquad \lvert P_\ell(\pm 1)\rvert = 1$
$\lvert P_\ell(x)\rvert \leq 1$	$-1 < x < 1$	$P'_\ell(1) = \dfrac{\ell(\ell+1)}{2}$
$P_\ell^2(x) > P_{\ell-1}(x)P_{\ell+1}(x)$	$-1 < x < 1$	$P_{2\ell}(0) = (-1)^\ell \dfrac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}$
$\displaystyle\sum_{j=0}^{n} P_j(x) \geq 0$	$x \geq -1$	

7. Relaciones de recurrencia

Diferenciales	Algebraicas
$\dfrac{d}{dx}P_{\ell-1} = x\dfrac{d}{dx}P_\ell - \ell P_\ell$	
$\dfrac{d}{dx}P_{\ell+1} = x\dfrac{d}{dx}P_\ell + \ell(\ell+1)P_\ell$	$(\ell+1)P_{\ell+1} = (2\ell+1)xP_\ell - \ell P_{\ell-1}$
$\dfrac{d}{dx}\left(P_{\ell+1} - P_{\ell-1}\right) = (2\ell+1)P_\ell$	
$(1-x^2)\dfrac{d}{dx}P_\ell = \ell(P_{\ell-1} - xP_\ell)$	

8. Raíces de los polinomios de Legendre

- Las ℓ raíces de P_ℓ son *reales y simples* y están en el intervalo $(-1, 1)$.
- La raíces de P_ℓ y $P_{\ell+1}$ se separan entre sí: entre dos raíces de P_ℓ hay sólo una raíz de $P_{\ell+1}$ y viceversa.

8.3.3. Desarrollo de Fourier-Legendre (Refs: [12], cap. 9)

1. Relaciones de ortogonalidad y completitud

$$\langle P_\ell, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_n(x)dx = \int_0^\pi P_\ell(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell n}$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2}P_\ell(y)P_\ell(x) = \delta(y-x)$$

2. El desarrollo de una función $f(x)$ definida en $-1 \leq x \leq 1$ en serie de Fourier-Legendre es:

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(x) \qquad a_\ell = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_\ell(x)dx$$

$$= \frac{2\ell+1}{2^{\ell+1}l!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^\ell \frac{d^\ell f}{dx^\ell}dx \qquad \Big(\text{si } f \in C^\ell(-1,1)\Big)$$

3. x^n en téminos de $P_\ell(x)$

$$x^n = \sum_{\ell=n,n-2,n-4,\dots} \frac{(2\ell+1)n!}{2^{(n-\ell)/2}\left(\frac{n-\ell}{2}\right)!(n+\ell+1)!!} P_\ell(x)$$

$x = P_1(x)$	$x^2 = \frac{1}{3}\left[P_0(x) + 2P_2(x)\right]$
$x^3 = \frac{1}{5}\left[3P_1(x) + 2P_3(x)\right]$	$x^4 = \frac{1}{35}\left[7P_0(x) + 20P_2(x) + 8P_4(x)\right]$
$x^5 = \frac{1}{63}\left[27P_1(x) + 28P_3(x) + 8P_5(x)\right]$	$x^6 = \frac{1}{231}\left[33P_0(x) + 110P_2(x) + 72P_4(x) + 16P_6(x)\right]$

8.4. Funciones asociadas de Legendre (Refs: [12], cap. 9)

1. Ecuación asociada de Legendre

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0$$

con $x = \cos\theta$:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dy}{d\theta}\right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right] y = 0$$

2. Soluciones

- La ecuación posee una solución finita en $x = \pm 1$ sólo para ℓ entero y $-\ell \le m \le \ell$.
- Si $P_\ell(x)$ y $Q_\ell(x)$ son polinomios y funciones de Legendre de segundo tipo, las funciones:

$$P_\ell^m = \left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x) \qquad Q_\ell^m = \left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}Q_\ell(x) \tag{1}$$

  son soluciones para $|x| < 1$ con $0 \le m \le \ell$.
- **Comportamiento en $x = \pm 1$:**

$$|P_\ell^m(x=\pm 1)| < \infty$$
$$Q_\ell^m(x=\pm 1) = \infty$$

  $\rightarrow$ **$P_\ell^m(x)$ son las únicas soluciones finitas en $x = \pm 1$**
- **La ecuación es simétrica ante cada una de las sustituciones:**

$$m \to -m$$
$$\ell \to -\ell - 1$$

  las soluciones correspondientes son por tanto proporcionales:

$$P_\ell^{-m} \propto P_\ell^m$$
$$P_{-(\ell+1)}^m \propto P_\ell^m$$

8.4.1. Funciones asociadas de Legendre de primer tipo

1. Usando la fórmula de Rodrigues para $P_\ell(x)$ y la propiedad (1):

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{m/2}\,\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell$$

Es fácil ver por sustitución directa que esta expresión proporciona soluciones de la ecuación de Legendre modificada independientemente del signo de m. Esto permite usarla para definir P_ℓ^m con $m < 0$. Con esta definición la proporcionalidad es:

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x)$$

de este modo se obtiene las soluciones finitas en $[-1, 1]$.

2. Función generatriz

$$G_m(x,h) = \frac{(2m)!}{2^m m!}\frac{(1-x^2)^{m/2}h^m}{(1-2hx+h^2)^{m+1/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell^m(x)h^\ell$$

3. Primeras funciones asociadas de primer tipo P_ℓ^m:

$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$
$P_0^0(x) = 1$	$P_1^{-1}(x) = -\frac{1}{2}P_1^1(x)$ $P_1^0(x) = x$ $P_1^1(x) = -(1-x^2)^{1/2}$	$P_2^{-2}(x) = \frac{1}{24}P_2^2(x)$ $P_2^{-1}(x) = -\frac{1}{6}P_2^1(x)$ $P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$ $P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^{1/2}$ $P_2^2(x) = 3(1-x^2)$	$P_3^{-3}(x) = -\frac{1}{720}P_3^3(x)$ $P_3^{-2}(x) = \frac{1}{120}P_3^2(x)$ $P_3^{-1}(x) = -\frac{1}{12}P_3^1(x)$ $P_3^0(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$ $P_3^1(x) = -\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}$ $P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$ $P_3^3(x) = -15(1-x^2)^{3/2}$

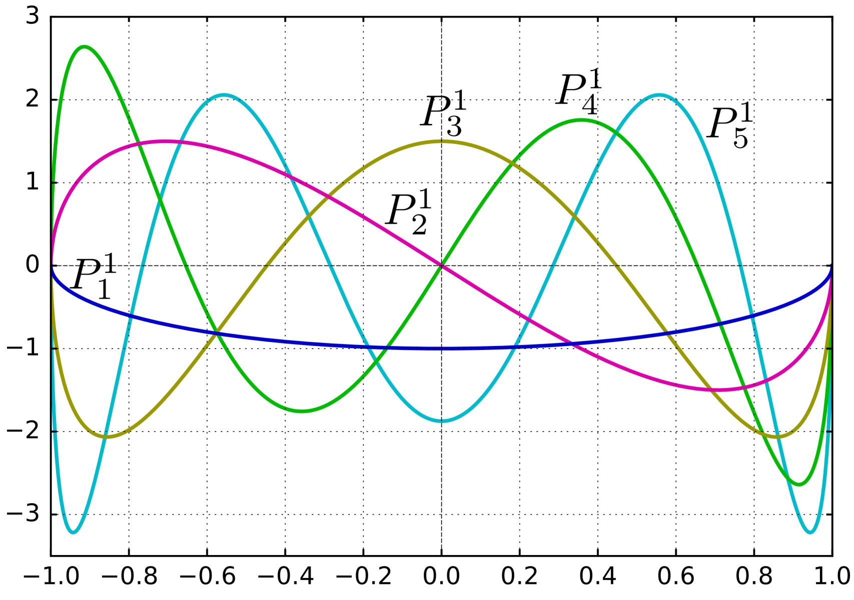


Figura 13: P_ℓ^m para $m = 1$, $1 \leq \ell \leq 5$.

4. Propiedades y valores notables

Propiedades	Valores notables
$P_\ell^0(x) = P_\ell(x)$ $P_{-\ell-1}^m(x) = P_\ell^m(x)$ $P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \dfrac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x)$ $P_\ell^m(-x) = (-1)^{\ell+m} P_\ell^m(x)$ (paridad) $P_\ell^\ell(x) = (2\ell-1)!!(1-x^2)^{\ell/2}$	$P_\ell^0(1) = P_\ell(1) = 1$ $P_\ell^m(\pm 1) = 0 \quad (m \neq 0)$ $P_\ell^m(0) = \begin{cases} (-1)^{(\ell+m)/2} \frac{(\ell+m-1)!!}{(\ell-m)!!} & \ell+m \text{ par} \\ 0 & \ell+m \text{ impar} \end{cases}$

Obs: $P_\ell^m(x)$ tiene la paridad de $\ell + m$.

5. Relaciones de recurrencia

Diferenciales
$\sqrt{1-x^2}\dfrac{d}{dx}P_\ell^m(x) = \dfrac{1}{2}\left[(\ell+m)(\ell-m+1)P_\ell^{m-1}(x) - P_\ell^{m+1}(x)\right]$
$(1-x^2)\dfrac{d}{dx}P_\ell^m(x) = \dfrac{1}{2\ell+1}\left[(\ell+1)(\ell+m)P_{\ell-1}^m(x) - \ell(\ell-m+1)P_{\ell+1}^m(x)\right]$

Algebraicas
$(\ell-m+1)P_{\ell+1}^m(x) = (2\ell+1)xP_\ell^m(x) - (\ell+m)P_{\ell-1}^m(x)$
$P_{\ell+1}^\ell(x) = x(2\ell+1)P_\ell^\ell(x)$
$2mxP_\ell^m(x) = -\sqrt{1-x^2}\left[P_\ell^{m+1}(x) + (\ell+m)(\ell-m+1)P_\ell^{m-1}(x)\right]$

6. Ceros de P_ℓ^m

De la fórmula de Rodrigues y de las propiedades de las raíces de $P_\ell(x)$ se puede deducir que:

- $P_\ell^m(x)$ tiene $\ell - |m|$ ceros en $(-1, 1)$.
- Si $m \neq 0$: $P_\ell^m(\pm 1) = 0$.
- Si $m = 0$: $P_\ell^m(\pm 1) = P_\ell(\pm 1) = (-1)^\ell \neq 0$.

8.4.2. Desarrollo en serie de funciones asociadas

1. Relaciones de ortogonalidad

$$\langle P_\ell^m(x), P_n^m(x)\rangle = \int_{-1}^{1} P_\ell^m(x)P_n^m(x)dx = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell n}$$
$$\langle P_\ell^m(x), P_\ell^n(x)\rangle = \int_{-1}^{1} P_\ell^m(x)P_n^m(x)(1-x^2)^{-1}dx = \frac{(\ell+m)!}{m(\ell-m)!}\delta_{\ell n}$$

2. El desarrollo de una función $f(x)$ definida en $-1 \leq x \leq 1$ en serie de Fourier-Legendre de funciones asociadas es:

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell^m(x)$$

$$a_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_\ell^m(x) dx$$

8.5. Convergencia de las series de Legendre

Es posible demostrar ([5], sec. 4.3-4.7) que los desarrollos de Fourier-Legendre (8.3.3) y (8.4.2) convergen bajo las mismas condiciones que las series de Fourier.

8.6. Armónicos esféricos (Refs: [6], cap. 3)

8.6.1. Ecuación

En la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) por separación de variables, la función incógnita es escrita como: $\Phi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$. La parte angular $Y(\theta, \phi)$ satisface la ecuación:

$$\nabla^2_{(\theta,\phi)} Y(\theta, \phi) = -\ell(\ell + 1)Y(\theta, \phi) \qquad (\ell \in \mathbb{R} \text{ constante de separación})$$

con:

$$\nabla^2_{(\theta,\phi)} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

La separación $Y(\theta, \phi) = T(\theta)F(\phi)$ resulta en las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2F}{d\phi^2} = -m^2F \qquad (m \in \mathbb{R} \text{ constante de separación}) \qquad \text{(oscilador armónico)} \\ \\ \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} \dfrac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen}\theta \dfrac{dT}{d\theta} \right) + \left[\ell(\ell + 1) - \dfrac{m^2}{\operatorname{sen}^2\theta} \right] T = 0 \qquad \text{(ecuación de Legendre modificada)} \end{cases}$$

que tienen las soluciones generales:

$$F(\phi) = a_1 e^{im\phi} + a_2 e^{-im\phi}$$
$$T(\theta) = c_1 P_\ell^m(\cos\theta) + c_2 Q_\ell^m(\cos\theta)$$

Si todo el rango de θ y ϕ es accesible, debe verificarse:

$$\begin{cases} F(\phi) = F(\phi + 2\pi) \qquad (Y(\theta, \phi) \text{ debe ser univaluada}) \\ T(\theta = 0, \pi) < \infty \qquad (\text{Finitud en los polos} \to T(\theta) = P_\ell^m(\cos\theta)) \end{cases}$$

una base de soluciones admisibles es:

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = N_{\ell m}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi} \qquad \ell, m \text{ enteros con: } \ell = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad -\ell \le m \le \ell$$

con $N_{\ell m}$ una constante de normalización compleja cualquiera (dependiente de ℓ y m en general). Las funciones de esta base de soluciones se denominan *armónicos esféricos*. La normalización usual $N_{\ell m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}$ simplifica las relaciones de ortogonalidad.

$$\boxed{\begin{array}{l} Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\dfrac{2\ell + 1}{4\pi} \dfrac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi} \\ \\ \qquad \ell = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ \qquad -\ell \le m \le \ell \end{array}}$$

8.6.2. Propiedades

1. Conjugación: $Y_{\ell -m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{\ell m}(\theta,\phi)$

2. Paridad ante una inversión espacial: $Y_{\ell m}(\pi-\theta,\pi+\phi) = (-1)^\ell Y_{\ell m}(\theta,\phi)$

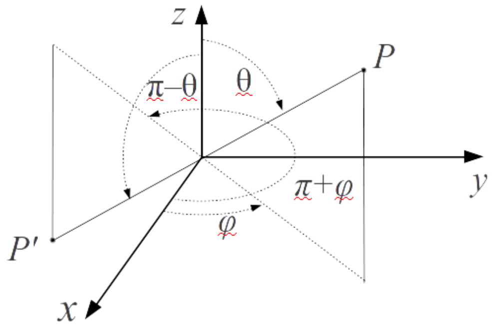


Figura 14: Cambio de los ángulos ante la inversión $P \to P'$

3. Casos notables

$$
\begin{aligned}
Y_{\ell 0}(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos\theta) \\
Y_{\ell \pm\ell}(\theta,\phi) &= \frac{(\mp 1)^\ell}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}}\,\mathrm{sen}^\ell(\theta) e^{\pm i\ell\phi} \\
Y_{\ell m}(0,\phi) &= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\delta_{m0}
\end{aligned}
$$

8.6.3. Visualización de los armonicos esféricos

Una visualización gráfica rápida de un armónico esférico $Y_{\ell m}$ consiste en obviar el módulo y representar en la esfera unidad los ceros de $P^m_\ell(\cos\theta)$ y los ceros la parte real de $e^{im\phi}$. Los primeros son paralelos $\theta = cte$ (hay ceros en los polos si $|m| > 0$). Los segundos son meridianos $\phi = cte$. En cada sector se adjunta también el signo de la parte real de $Y_{\ell m}$.

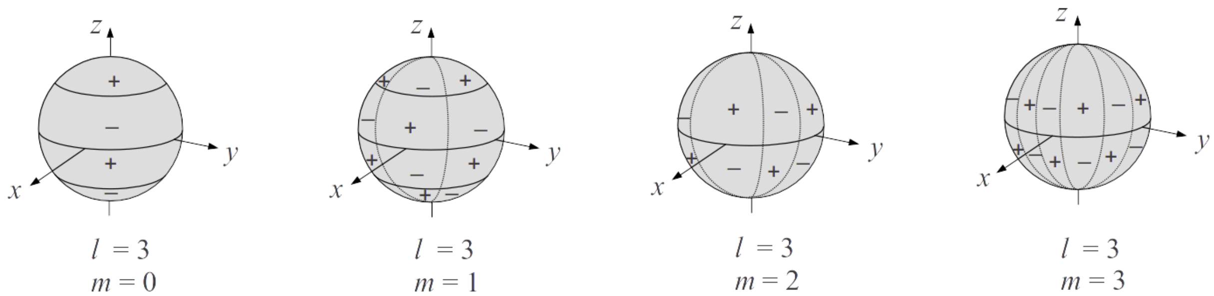


Figura 15: Visualización de Y_{3m}

8.6.4. Desarrollo en serie de armónicos esféricos

Los armónicos esféricos forman una base ortonormal de las funciones en la esfera unidad $f(\theta,\phi)$ de cuadrado integrable:

$$f \in L^2[S^1] : \qquad \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} |f(\theta,\phi)|^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi < \infty$$

1. Relaciones de ortogonalidad y completitud

$$\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} Y^*_{\ell m}(\theta,\phi)\, Y_{\ell' m'}(\theta,\phi)\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\theta_1,\phi_1)\, Y_{\ell m}(\theta_2,\phi_2) &= \delta(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\delta(\phi_1-\phi_2) \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta_1}\delta(\theta_1-\theta_2)\delta(\phi_1-\phi_2)\end{aligned}$$

2. El desarrollo en armónicos de una función $f \in L^2[S^1]$, llamado también *serie de Fourier-Laplace* es:

$$\boxed{\begin{aligned} f(\theta,\phi) &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell m}\, Y_{\ell m}(\theta,\phi) \\ f_{\ell m} &= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} f^*(\theta,\phi) Y_{\ell m}(\theta,\phi) \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \end{aligned}}$$

Obs 1: Si la función $f(\theta,\phi)$ es *real* ($f(\theta,\phi) = f^*(\theta,\phi)$), se deduce de la propiedad de conjugación de $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ que los coeficientes $f_{\ell m}$ cumplen: $f_{\ell\, -m} = (-1)^m f^*_{\ell m}$.

Obs 2: Dado que los $Y_\ell^m(\theta,\phi)$ forman una base, una función $f(\theta,\phi)$ que satisfaga la ecuación angular:

$$\nabla^2_{(\theta,\phi)} f(\theta,\phi) = -\ell(\ell+1) f(\theta,\phi)$$

para un ℓ **dado y fijo**, tendrá un desarrollo en el que sólo intervendrán los armónicos con ese valor de ℓ:

$$f(\theta,\phi) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell m}\, Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

8.6.5. Armónicos esféricos reales

Los armónicos esféricos anteriores son complejos debido a la fase $e^{im\phi}$. Las partes real e imaginaria son proporcionales a $\cos(m\phi)$ y $\operatorname{sen}(m\phi)$ respectivamente:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} Y_{\ell m}(\theta,\phi) &= N_{\ell m}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, \cos(m\phi) \\
\operatorname{Im} Y_{\ell m}(\theta,\phi) &= N_{\ell m}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, \operatorname{sen}(m\phi) \qquad N_{\ell m} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}
\end{aligned}$$

La partes reales no son LI ante el cambio de signo de m: $m \to -m$. Lo mismo sucede con las partes imaginarias.

1. La base de armónicos esféricos reales $\{y^c_{lm}, y^s_{lm}\}$ se define como:

$$\begin{cases}
y^c_{\ell m}(\theta,\phi) = \dfrac{(-1)^m}{\sqrt{2}}\,(Y_{lm} + Y^*_{lm}) = \sqrt{2}(-1)^m N_{\ell m}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, \cos(m\phi) \qquad m = 0, 1, \dots \ell \\[2ex]
\left(y^c_{\ell 0}(\theta,\phi) = Y_{\ell 0}(\theta,\phi) = \sqrt{\dfrac{2\ell+1}{4\pi}}\, P_\ell(\cos\theta) \right) \\[2ex]
y^s_{\ell m}(\theta,\phi) = \dfrac{(-1)^m}{i\sqrt{2}}\,(Y_{lm} - Y^*_{lm}) = \sqrt{2}(-1)^m N_{\ell m}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, \operatorname{sen}(m\phi) \qquad m = 1, 2, \dots \ell
\end{cases}$$

2. Sólo es necesario tomar $0 < m < \ell$. Para un ℓ dado hay $2\ell + 1$ elementos en la base, al igual que con los $Y_{\ell m}$.

3. Las relaciones de ortogonalidad para los armonicos reales son:

$$\begin{aligned}
\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} y^{c,s}_{\ell m}(\theta,\phi)\, y^{c,s}_{\ell' m'}(\theta,\phi)\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi &= \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{mm'} \\
\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} y^{c,s}_{\ell m}(\theta,\phi)\, y^{s,c}_{\ell' m'}(\theta,\phi)\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi &= 0
\end{aligned}$$

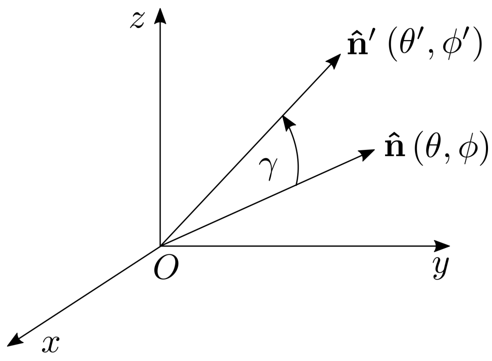
4. El desarrollo en armónicos reales de una función $f \in L^2[S^1]$ es:

$$\boxed{\begin{aligned}
f(\theta,\phi) &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\ell} a_{\ell m}\, y^c_{\ell m}(\theta,\phi) + \sum_{m=1}^{\ell} b_{\ell m}\, y^s_{\ell m}(\theta,\phi)\right] \\[2ex]
a_{\ell m} &= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} f(\theta,\phi) y^c_{\ell m}(\theta,\phi)\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi \\
b_{\ell m} &= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} f(\theta,\phi) y^s_{\ell m}(\theta,\phi)\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi
\end{aligned}}$$

8.6.6. Teorema de adición

Un resultado importante en la teoría del potencial es el *teorema de adición de armónicos esféricos*. Dadas las dos direcciones de la figura $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}'$:

$$\cos\gamma = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}' = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\phi - \phi') \tag{2}$$



Se verifican las relaciones:

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta,\phi)\, Y_{\ell m}(\theta',\phi') = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\gamma)$$

(teorema de adición)

$$\delta(\cos\theta' - \cos\theta)\delta(\phi' - \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\gamma)$$

- Para $\ell = 1$ el teorema de adición es la expresión (2).

- Si las direcciones son iguales ($\theta' = \theta$ y $\phi' = \phi$) resulta la relación: [2]

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_{\ell m}(\theta,\phi)|^2 = \frac{2\ell+1}{4\pi}$$

[2] Notar que la suma en m con ℓ fijo de los módulos al cuadrado de los armónicos es esféricamente simétrica.

9. Desarrollos de 1/R (Refs: [6], cap. 3)

9.1. Coordenadas esféricas

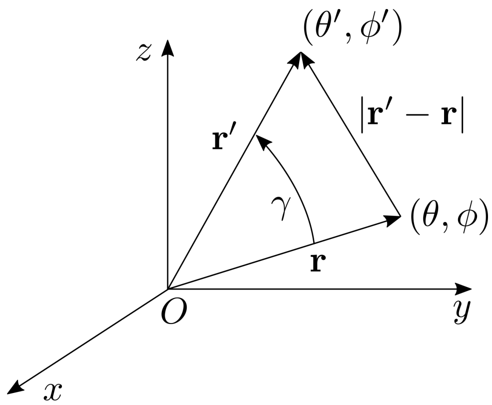


Figura 16: Geometría de $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$

La inversa de la distancia entre los puntos $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ de la figura es:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} = \frac{1}{r_>}\left(1 + \frac{r_<^2}{r_>^2} - 2\frac{r_<}{r_>}\cos\gamma\right)^{-1/2}$$

donde:

$$\begin{aligned} r_> &= \max\left\{r, r'\right\} \\ r_< &= \min\left\{r, r'\right\} \end{aligned}$$

Usando la función generatriz de los P_ℓ y el teorema de adición se demuestra:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l\left(\cos\gamma\right)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

A partir de éstas se obtiene la integral:

$$\int \frac{d\Omega}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{4\pi}{r_>} \qquad\qquad d\Omega = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$$

9.2. Coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{2}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \mathrm{d}k\, e^{im(\phi - \phi')}\cos[k(z - z')] I_m\left(k\rho_<\right)\, K_m\left(k\rho_>\right)$$

A partir de esta expresión se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{d}k \cos(kz) K_0(k\rho)$$

10. Soluciones de la ecuación de Laplace

10.1. Coordenadas cilíndricas

1. Solución general sin dependencia en z

$$\Phi(\rho, \phi) = (A_0 \ln \rho + B_0)(a_0 \phi + b_0) \; + \; \sum_{k \neq 0} \left(A_k \rho^k + \frac{B_k}{\rho^k} \right) (a_k \operatorname{sen}(k\phi) + b_k \cos(k\phi))$$

· Los valores admisibles de la constante de separación k dependen de las CB, incluso pueden ser imaginarios.

10.2. Coordenadas esféricas

1. Solución general

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \phi) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(a_{\ell m} \, r^\ell + \frac{b_{\ell m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(A_\ell \, r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell m}(\cos \theta) \, (C_m e^{im\phi} + D_m e^{-im\phi}) \end{aligned}$$

2. Solución general sin dependencia en ϕ

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell \, r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos \theta)$$

11. Funciones de Green del laplaciano (Refs: [6], cap. 3)

11.1. Generalidades

1. Las funciones de Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ del operador Laplaciano, para un problema con CB de Dirichlet o Neumann en una región limitada por la superficie S con normal saliente $\hat{\mathbf{n}}$, están caracterizadas por:

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad \text{con:} \begin{cases} G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}'\in S) = 0 & \text{CB de Dirichlet} \\ \\ \partial_n G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}'\in S) = -\dfrac{4\pi}{S} & \text{CB de Neumann} \end{cases} \tag{3}$$

2. La ecuación diferencial de (3) para G tiene la solución general:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = N(\mathbf{r},\mathbf{r}') + F(\mathbf{r},\mathbf{r}') \qquad \begin{cases} N : \text{solución particular de } \nabla'^2 G = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ F : \text{solución general de } \nabla'^2 G = 0 \end{cases}$$

- F se elige para que G satisfaga las CB.
- N se llama *solución fundamental* y tiene las expresiones en $2d$ y $3d$:

$$N(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \begin{cases} -\ln((x-x')^2+(y-y')^2) & 2d \\ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} & 3d \end{cases}$$

3. Las soluciones respectivas para los problemas electrostáticos de frontera son:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\, G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \Phi(\mathbf{r}')\,\frac{\partial G_D}{\partial n'}\,\mathrm{d}S'$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = <\Phi>_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\, G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial\Phi}{\partial n'} G_N\,\mathrm{d}S'$$

11.2. Propiedades

1. $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ es continua en $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$.

2. Simetría:

- $G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G_D(\mathbf{r}',\mathbf{r})$
- $G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ puede no ser simétrica. Se puede definir otra función de Green equivalente mediante:

$$\bar{G}_N(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \frac{1}{S}\oint_S G_N(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\,\mathrm{d}S''$$

  y resulta: $\bar{G}_N(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \bar{G}_N(\mathbf{r}',\mathbf{r})$

11.3. Algunas funciones de Green para problemas de Dirichlet

1. Esfera de radio a (ver figura 16)

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{a}{r'\left|\mathbf{r}-\dfrac{a^2}{r'^2}\mathbf{r}'\right|}$$

$$= \frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma)^{1/2}} - \frac{1}{\left(\dfrac{r^2r'^2}{a^2}+a^2-2rr'\cos\gamma\right)^{1/2}}$$

2. Región entre esferas de radios $a < b$

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') \;=\; 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)}{(2l+1)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]}\left(r^l_< - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}_<}\right)\left(\frac{1}{r^{l+1}_>}-\frac{r^l_>}{b^{2l+1}}\right)$$

3. Cilindro finito de radio a y altura L

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{4}{a}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_{m0})\,\frac{J_m(k_{mn}\rho)J_m(k_{mn}\rho')}{x_{mn}J^2_{m+1}(x_{mn})\,\mathrm{senh}(k_{mn}L)}\,Z_{mn}(z,z')\,\cos[m(\phi-\phi')]$$

$$Z_{mn}(z,z') = \mathrm{senh}(k_{mn}z_<)\,\mathrm{senh}[k_{mn}(L-z_>)]$$
$$k_{mn} = x_{mn}/a$$

4. Región $z > 0$

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') \;=\; \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}$$

5. Región entre dos planos separados L

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{4}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im(\phi-\phi')}\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}z\right)\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}z'\right)I_m\left(n\frac{\pi}{L}\rho_<\right)\,K_m\left(n\frac{\pi}{L}\rho_>\right)$$

6. Disco de radio a (cilindro infinito de radio a)

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \ln\left[\frac{(\rho\rho'/a)^2+a^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')}{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')}\right]$$

7. Rectángulo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$

$$G_D(x,y;x',y') = \frac{4\pi}{ab}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{[\mathrm{sen}(\alpha_n x)\;\mathrm{sen}(\beta_m y)]\,[\mathrm{sen}(\alpha_n x')\;\mathrm{sen}(\beta_m y')]}{\alpha_n^2+\beta_m^2}$$

$$= \frac{4\pi}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\mathrm{sen}(\alpha_n x)\;\mathrm{sen}(\alpha_n x')]\,[\mathrm{senh}(\alpha_n y_<)\;\mathrm{senh}(\alpha_n(b-y_>))]}{\alpha_n\;\mathrm{senh}(\alpha_n b)}$$

$$\alpha_n = n\frac{\pi}{a} \qquad \beta_m = m\frac{\pi}{b}$$

8. Región del plano $-\infty < x < +\infty$, $0 \le y \le b$

$$G_D(x,y;x',y') = \frac{2\pi}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\mathrm{sen}(\beta_n y)\;\mathrm{sen}(\beta_n y')]\,e^{-\beta_n|x-x'|}}{\beta_n}$$

$$\beta_n = n\frac{\pi}{b}$$

12. Identidades trigonométricas

1. Relaciones de funciones circulares e hiperbólicas

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$	$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$	$\operatorname{senh}(x) = -i \operatorname{sen}(ix)$
$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$	$\cosh x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$	$\cosh(x) = \cos(ix)$
$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x$	$e^{\pm x} = \cosh x \pm \operatorname{senh} x$	
$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$	
$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)$		

2. Funciones hiperbólicas inversas

$\operatorname{acosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$	$x \geq 1$	$\frac{d}{dx}\operatorname{acosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{asenh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$		$\frac{d}{dx}\operatorname{asenh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{atanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\lvert x \rvert < 1$	$\frac{d}{dx}\operatorname{atanh}(x) = \frac{1}{1-x^2}$

3. Ángulos doble y mitad

Suma	Suma (hiperbólicas)
$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$	$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \mp \tanh x \tan y}$

Ángulo doble	Ángulo mitad
$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$	$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$
$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$
$= 2\cos^2 x - 1$	$\tan \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$
$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$	
$= \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}} = \frac{1 - \tan\frac{x}{2}}{1 + \tan\frac{x}{2}}$
$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$	$\frac{\tan[\frac{1}{2}(x-y)]}{\tan[\frac{1}{2}(x+y)]} = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}$

Ángulo doble (hiperbólicas)	Ángulo mitad (hiperbólicas)
$\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh}x\cosh x = \dfrac{2\tanh x}{1-\tanh^2 x}$ $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\operatorname{senh}^2 x + 1 = \dfrac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x}$ $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$	$\operatorname{senh}^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{\cosh x - 1}{2}$ $\cosh^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{\cosh x + 1}{2}$ $\tanh\dfrac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{senh}x}{\cosh x + 1} = \dfrac{\cosh x - 1}{\operatorname{senh}x}$

4. Ángulos múltiples en términos de potencias

En las relaciones que siguen $T_n(z)$ y $U_n(z)$ son los polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie respectivamente:

$$T_n(z) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2z)^{n-2k} \qquad (n>0)$$

$$U_n(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(-1)^k C_k^{n-k}(2z)^{n-2k} \qquad (n>0)$$

Senos de ángulos múltiples en términos de T_n y U_n	
$\operatorname{sen}(nx) = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}\ T_n(\operatorname{sen}x) & n \text{ impar} \\ (-1)^{n/2-1}\ \cos x\, U_{n-1}(\operatorname{sen}x) & n \text{ par} \end{cases}$	$\operatorname{sen}(nx) = \operatorname{sen}x\ U_{n-1}(\cos x)$
$\operatorname{sen}(2x) = 2\cos x \operatorname{sen}x$	$\operatorname{sen}(2x) = 2\cos x \operatorname{sen}x$
$\operatorname{sen}(3x) = 3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3 x$	$\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}x(-1 + 4\cos^2 x)$
$\operatorname{sen}(4x) = \cos x(4\operatorname{sen}x - 8\operatorname{sen}^3 x)$	$\operatorname{sen}(4x) = \operatorname{sen}x(-4\cos x + 8\cos^3 x)$
$\operatorname{sen}(5x) = 5\operatorname{sen}x - 20\operatorname{sen}^3 x + 16\operatorname{sen}^5 x$	$\operatorname{sen}(5x) = \operatorname{sen}x(1 - 12\cos^2 x + 16\cos^4 x)$

Cosenos de ángulos múltiples en términos de T_n y U_n	
$\cos(nx) = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}\ \cos x\, U_{n-1}(\operatorname{sen}x) & n \text{ impar} \\ (-1)^{n/2}\ T_n(\operatorname{sen}x) & n \text{ par} \end{cases}$	$\cos(nx) = T_n(\cos x)$
$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$	$\cos(2x) = -1 + 2\cos^2 x$
$\cos(3x) = \cos x(1 - 4\operatorname{sen}^2 x)$	$\cos(3x) = -3\cos x + 4\cos^3 x$
$\cos(4x) = 1 - 8\operatorname{sen}^2 x + 8\operatorname{sen}^4 x$	$\cos(4x) = 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x$
$\cos(5x) = \cos x(1 - 12\operatorname{sen}^2 x + 16\operatorname{sen}^4 x)$	$\cos(5x) = 5\cos x - 20\cos^3 x + 16\cos^5 x$

Ángulos múltiples - fórmulas binomiales	
$\operatorname{sen}(nx) = \sum_{k \text{ impar}} (-1)^{\frac{k-1}{2}} C_k^n \cos^{n-k} x \operatorname{sen}^k x$	
$\cos(nx) = \sum_{k \text{ par}} (-1)^{\frac{k}{2}} C_k^n \cos^{n-k} x \operatorname{sen}^k x$	$\tan(nx) = \dfrac{\sum_{k \text{ impar}} (-1)^{\frac{k-1}{2}} C_k^n \tan^k x}{\sum_{k \text{ par}} (-1)^{\frac{k}{2}} C_k^n \tan^k x}$

5. Potencias en términos de ángulos múltiples

Potencias de sen y cos

$$\operatorname{sen}^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} C_n^{2n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_k^{2n} \cos[2(n-k)x]$$

$$\operatorname{sen}^{2n+1} x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k^{2n+1} \operatorname{sen}[(2n+1-2k)x]$$

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} C_n^{2n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{2n} \cos[2(n-k)x]$$

$$\cos^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} C_k^{2n+1} \cos[(2n+1-2k)x]$$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$
$\operatorname{sen}^3 x = \frac{1}{4}[3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3x)]$	$\cos^3 x = \frac{1}{4}[3 \cos x + \cos(3x)]$
$\operatorname{sen}^4 x = \frac{1}{8}[3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)]$	$\cos^4 x = \frac{1}{8}[3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)]$
$\operatorname{sen}^5 x = \frac{1}{16}[10 \operatorname{sen} x - 5 \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x)]$	$\cos^5 x = \frac{1}{16}[10 \cos x + 5\cos(3x) + \cos(5x)]$

de estas relaciones se deduce:

$$a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}\left[a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos(2x)\right]$$

$$a^2 \cos^4 x - b^2 \operatorname{sen}^4 x = \frac{1}{8}\left[2(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)[\cos(4x) + 3]\right]$$

6. Sumas y productos

Producto a suma	Suma a producto
$2\cos x\cos y = \cos(x-y)+\cos(x+y)$ $2\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y = \cos(x-y)-\cos(x+y)$ $2\operatorname{sen} x\cos y = \operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)$	$\operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x\pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x\mp y}{2}\right)$ $\cos x+\cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cos x-\cos y = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Producto a suma (hiperbólicas)	Suma a producto (hiperbólicas)
$2\cosh x\cosh y = \cosh(x+y)+\cosh(x-y)$ $2\operatorname{senh} x\cosh y = \operatorname{senh}(x+y)+\operatorname{senh}(x-y)$ $2\operatorname{senh} x\operatorname{senh} y = \cosh(x+y)-\cosh(x-y)$	$\operatorname{senh} x \pm \operatorname{senh} y = 2\operatorname{senh}\left(\frac{x\pm y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x\mp y}{2}\right)$ $\cosh x+\cosh y = 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cosh x-\cosh y = 2\operatorname{senh}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{x-y}{2}\right)$

13. Valores de constantes

Constantes universales	
Velocidad de la luz	$c = 299\,792\,458\, m/s$
Constante de gravitación	$G = 6{,}674\,08 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$
Constante de Planck	$h = 6{,}626\,070\,040 \times 10^{-34} Js$
	$\hbar = h/2\pi = 1{,}054\,571\,800 \times 10^{-34} Js$

Constantes electromagnéticas	
Carga elemental	$e = 1{,}602\,176\,565 \times 10^{-19} C$
Permeabilidad del vacío	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ H/m \simeq 1{,}256\,637\,0614 \times 10^{-6}\ H/m$
Permitividad del vacío	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 \simeq 8{,}854\,187\,817\,620 \times 10^{-12}\ F/m$
Constante de Coulomb	$k_e = 1/4\pi\epsilon_0 = 8{,}987\,551\,787 \times 10^9 Nm^2/C^2$

Constantes atómicas	
Masa del electrón	$m_e = 9{,}109\,383\,56 \times 10^{-31} kg$
Masa del protón	$m_p = 1{,}672\,621\,898 \times 10^{-27} kg$
Constante de estructura fina	$\alpha = \mu_0 e^2 c/2h = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c = 7{,}297\,352\,5664 \times 10^{-3}$
Radio de Bohr	$a_0 = \hbar/\alpha m_e c = 5{,}291\,772\,106\,7 \times 10^{-11} m$
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \hbar/2m_e = 9{,}274\,009\,68 \times 10^{-24} J/T$

14. Desarrollos en serie comunmente encontrados

1. Serie geométrica y derivadas

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)n}{2} x^{n-2} \qquad |x| < 1$$

2. Series binomiales

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\alpha x^n \qquad C_n^\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$|x| < 1 \qquad (C_n^\alpha = 0 \text{ si } \alpha \in \mathbb{N} \text{ y } n > \alpha)$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 + \tfrac{7}{256}x^5 - \dots$$

$$(1+x)^{3/2} = 1 + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 + \tfrac{3}{128}x^4 - \tfrac{3}{256}x^5 + \dots$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 + \tfrac{35}{128}x^4 - \tfrac{63}{256}x^5 + \dots$$

$$(1+x)^{-3/2} = 1 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{15}{8}x^2 - \tfrac{35}{16}x^3 + \tfrac{315}{128}x^4 - \tfrac{693}{256}x^5 + \dots$$

3. Exponenciales y logaritmos

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \forall x$$

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad |x| < 1$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad |x| < 1$$

4. Funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad \forall x$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad \forall x$$

$$\tan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n (1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots \quad |x| \le 1$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad |x| \le 1,\ x \ne \pm i$$

Los números de Bernoulli B_m están definidos por la recurrencia:

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_m = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_k^m}{m-k+1} B_k \end{cases}$$

5. Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad \forall x$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad \forall x$$

$$\tanh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} 4^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x| \le 1$$

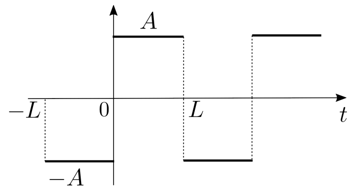
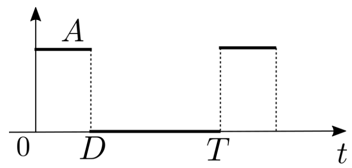
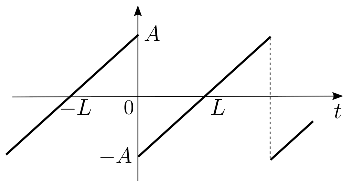
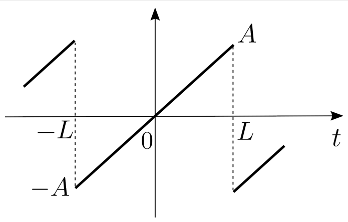
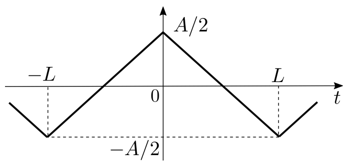
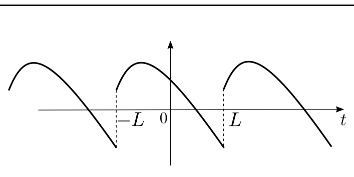
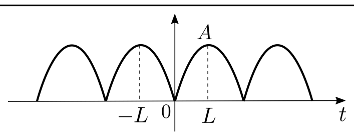
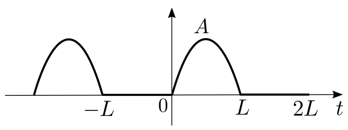
$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(2x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{-2n}}{2n} \quad |x| > 1$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x| \le 1,\ x \ne \pm 1$$

15. Series y Transformadas de Fourier

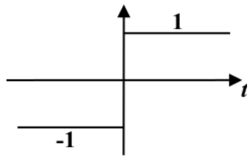
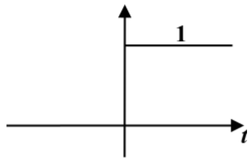
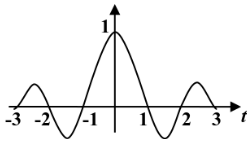
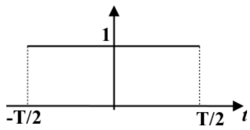
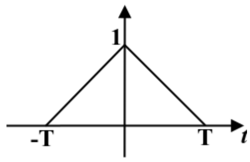
15.1. Series de Fourier

Series de Fourier de algunas funciones. (Refs: [15] y [11])

Función		Serie
$\begin{cases} -A & -L<t<0 \\ A & 0<t<L \end{cases}$		$\frac{4A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}((2k+1)\frac{\pi}{L}t)}{2k+1}$
$\begin{cases} A & 0<t<D \\ 0 & 0<t<T \end{cases}$		$\frac{AD}{2}+\frac{2AD}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(\frac{k\pi D}{T})}{\frac{k\pi D}{T}}\cos(k\omega_0 t)$
$\begin{cases} \frac{A}{L}(t+L) & -L\le t\le 0 \\ \frac{A}{L}(t-L) & 0\le t\le L \end{cases}$		$-\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(k\frac{\pi}{L}t)}{k}$
$\frac{A}{L}t \qquad -L\le t\le L$		$\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\mathrm{sen}(k\frac{\pi}{L}t)$
$\begin{cases} \frac{-A}{2}+\frac{A}{L}(t+L) & -L\le t\le 0 \\ \frac{-A}{2}+\frac{-A}{L}(t-L) & 0\le t\le L \end{cases}$		$\frac{4A}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)\frac{\pi}{L}t)}{(2k-1)^2}$
At^2+Bt+C		$\frac{L^2}{3}A+C+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4AL^2}{\pi^2k^2}\cos(k\frac{\pi}{L}t)$ $-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2BL}{\pi k}\,\mathrm{sen}(k\frac{\pi}{L}t)$
$A\lvert\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{T}t)\rvert$		$\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\omega_0 t)}{4k^2-1}$
$\begin{cases} \mathrm{sen}(\frac{2\pi}{T}t) & 0\le t\le T/2 \\ 0 & T/2\le t\le T \end{cases}$		$\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)-\frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\omega_0 t)}{4k^2-1}$

15.2. Transformadas de Fourier

1. Funciones útiles

Función	Definición	
Signo	$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ +1 & t > 0 \end{cases}$	
Escalón	$\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ +1 & t > 0 \end{cases}$	
Sinc	$\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \\ +1 & t = 0 \end{cases}$	
Rectángulo	$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \lvert t\rvert < \frac{T}{2} \\ 0 & \lvert t\rvert > \frac{T}{2} \end{cases}$	
Triángulo	$\operatorname{tri}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{T} & \lvert t\rvert < T \\ 0 & \lvert t\rvert > T \end{cases}$	

Se verifica la relación: $\operatorname{tri}(t) = \operatorname{rect} * \operatorname{rect}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}(t-u)\operatorname{rect}(u)\,du$.

2. Tabla de transformadas (Refs: [16], [13] y [14])

Función $f(t)$	$F(\nu)$	$F(\omega)$
$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\lvert T\rvert\,\mathrm{sinc}(T\nu)$	$\sqrt{\dfrac{T^2}{2\pi}}\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{T\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\lvert T\rvert\,\mathrm{sinc}^2(T\nu)$	$\sqrt{\dfrac{T^2}{2\pi}}\,\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{T\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{sinc}(at)$	$\lvert T\rvert\,\mathrm{rect}(T\nu)$	$\sqrt{\dfrac{T^2}{2\pi}}\,\mathrm{rect}\left(\dfrac{T\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{sinc}^2(at)$	$\lvert T\rvert\,\mathrm{tri}(T\nu)$	$\sqrt{\dfrac{T^2}{2\pi}}\,\mathrm{tri}\left(\dfrac{T\omega}{2\pi}\right)$
$e^{-at}\,\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{1}{a+2\pi i\nu}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(a+i\omega)$
e^{-at^2}	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\cdot e^{-\frac{(\pi\nu)^2}{a}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2\nu^2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+\omega^2}$
$f(t)\cos(at)$	$\dfrac{F\left(\nu-\frac{a}{2\pi}\right)+F\left(\nu+\frac{a}{2\pi}\right)}{2}$	$\dfrac{F(\omega-a)+F(\omega+a)}{2}$
$f(t)\,\mathrm{sen}(at)$	$\dfrac{F\left(\nu-\frac{a}{2\pi}\right)+F\left(\nu+\frac{a}{2\pi}\right)}{2i}$	$\dfrac{F(\omega-a)+F(\omega+a)}{2i}$

15.3. Transformada de Fourier de distribuciones (Refs: [16])

La tabla siguiente resume las transformadas de Fourier de algunas distribuciones frecuentemente encontradas.

Función $f(t)$	$F(\nu)$	$F(\omega)$
1	$\delta(\nu)$	$\sqrt{2\pi}\,\delta(\omega)$
e^{iat}	$\delta\left(\nu - \frac{a}{2\pi}\right)$	$\sqrt{2\pi}\,\delta\left(\omega - a\right)$
$\cos(t)$	$\dfrac{\delta\left(\nu - \frac{a}{2\pi}\right) + \delta\left(\nu + \frac{a}{2\pi}\right)}{2}$	$\sqrt{2\pi}\,\dfrac{\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)}{2}$
$\operatorname{sen}(t)$	$\dfrac{\delta\left(\nu - \frac{a}{2\pi}\right) - \delta\left(\nu + \frac{a}{2\pi}\right)}{2i}$	$\sqrt{2\pi}\,\dfrac{\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a)}{2i}$
t^n	$\left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^n \delta^{(n)}(\nu)$	$i^n\sqrt{2\pi}\,\delta^{(n)}(\omega)$
$\delta^{(n)}(t)$	$(2\pi i\nu)^n$	$\dfrac{(i\omega)^n}{2\pi}$
$\dfrac{1}{t^n}$	$-i\pi\dfrac{(-2\pi i\nu)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(\nu)$	$-i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(\omega)$
$\lvert t\rvert^\alpha$ $(-1 < \alpha < 0)$	$-\dfrac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{\lvert 2\pi\nu\rvert^{\alpha+1}}$	$-\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)}{\lvert\omega\rvert^{\alpha+1}}$
$\operatorname{sgn}(t)$	$\dfrac{1}{i\pi\nu}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{i\omega}$
$\mathrm{u}(t)$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{i\pi\nu} + \delta(\nu)\right)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{i\pi\omega} + \delta(\omega)\right)$
$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT)$	$\displaystyle\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right)$	$\displaystyle\frac{\sqrt{2\pi}}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$
$\ln\lvert t\rvert$	$-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\lvert\nu\rvert} - \gamma\delta(\nu)$	$-\dfrac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\lvert\omega\rvert} - \sqrt{2\pi}\gamma\delta\left(\omega\right)$

15.4. Transformadas de seno y coseno (Refs: [13] y [14])

$f(t)$	$F_s(\omega)$	$F_s(\omega)$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F_c\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\frac{1}{a} F_c\left(\frac{\omega}{a}\right)$
e^{-at}	$\frac{2a}{\pi(a^2+\omega^2)}$	$\frac{2\omega}{\pi(a^2+\omega^2)}$
$t^{n-1}e^{-at}$, $a>0$, $n=0,1,2,\ldots$	$(-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}(\sqrt{a^2+\omega^2}-a)^{1/2}}\right]$	$(-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\frac{(\sqrt{a^2+\omega^2}-a)^{1/2}}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\right]$
$H(a-t)$	$\frac{2}{\pi\omega}\,\mathrm{sen}(a\pi)$	$\frac{2}{\pi\omega}\left[1-\cos(\omega a)\right]$
e^{-at^2}	$\frac{1}{\sqrt{a\pi}} e^{-\omega^2/4a}$	$\frac{1}{\sqrt{a\pi}} e^{-\omega^2/4a}$

16. Armonicos esféricos (Refs: [6], sec. 3.5 y [17])

16.1. Primeros armónicos

$\ell = 0$	$Y_0^0(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$
$\ell = 1$	$Y_1^{-1}(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ \operatorname{sen}\theta\, e^{-i\phi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ \frac{(x-iy)}{r}$ $Y_1^0(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\ \cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\ \frac{z}{r}$ $Y_1^1(\theta,\phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ \operatorname{sen}\theta\, e^{i\phi} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ \frac{(x+iy)}{r}$
$\ell = 2$	$Y_2^{-2}(\theta,\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\ \operatorname{sen}^2\theta\, e^{-2i\phi} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\ \frac{(x-iy)^2}{r^2}$ $Y_2^{-1}(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\ \operatorname{sen}\theta\ \cos\theta\, e^{-i\phi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\ \frac{(x-iy)\,z}{r^2}$ $Y_2^0(\theta,\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\ \frac{(2z^2-x^2-y^2)}{r^2}$ $Y_2^1(\theta,\phi) = \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\ \operatorname{sen}\theta\ \cos\theta\, e^{i\phi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\ \frac{(x+iy)\,z}{r^2}$ $Y_2^2(\theta,\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\ \operatorname{sen}^2\theta\, e^{2i\phi} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\ \frac{(x+iy)^2}{r^2}$

16.2. Primeros armónicos reales (Refs: [17])

$\ell = 0$	$y^c_{00} = s = Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
$\ell = 1$	$y^s_{11} = p_y = i\sqrt{\frac{1}{2}}\,(Y_{1-1} + Y_{11}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{y}{r}$ $y^c_{10} = p_z = Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{z}{r}$ $y^c_{11} = p_x = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(Y_{1-1} - Y_{11}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \operatorname{sen}\theta\cos\phi = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{x}{r}$
$\ell = 2$	$y^s_{22} = d_{xy} = i\sqrt{\frac{1}{2}}\,(Y_{2-2} - Y_{22}) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}(2\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot \frac{xy}{r^2}$ $y^s_{21} = d_{yz} = i\sqrt{\frac{1}{2}}\,(Y_{2-1} + Y_{21}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot \operatorname{sen}\theta\cos\theta \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot \frac{yz}{r^2}$ $y^c_{20} = d_{z^2} = Y_{20} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \frac{-x^2-y^2+2z^2}{r^2}$ $y^c_{21} = d_{xz} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(Y_{2-1} - Y_{21}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\phi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot \frac{zx}{r^2}$ $y^c_{22} = d_{x^2-y^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(Y_{2-2} + Y_{22}) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot \operatorname{sen}^2\theta\cos(2\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}} \cdot \frac{x^2-y^2}{r^2}$

Referencias

[1] L. A. Santaló - Vectores y tensores

[2] Paul C. Matthews - Vector Calculus

[3] C.M. Naón, R.D. Rossignoli, E.M. Santangelo - Ecuaciones Diferenciales en Física

[4] Francis B. Hildebrand - Advanced Calculus for Applications (2nd. ed.)

[5] E. C. Titchmarsh - Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Part 1

[6] J. D. Jackson - Classical Electrodynamics (3rd ed.)

[7] Djairo Guedes de Figueiredo - Análise de Fourier e equações diferenciais parciais

[8] Anders Vretblad - Fourier analysis and its applications

[9] Gerald B. Folland - Fourier Analysis and Its Applications

[10] Kenneth B. Howell - Principles of Fourier Analysis

[11] Georgi P. Tolstov - Fourier Series

[12] V. Henner, T. Belozerova, K. Forinash - Mathematical Methods in Physics

[13] http://eqworld.ipmnet.ru/en/auxiliary/aux-inttrans.htm

[14] H. Bateman et. al. - Tables of Integral Transforms (https://authors.library.caltech.edu/43489/1/Volume%201.pdf)

[15] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik - Table of Integrals, Series, and Products

[16] Fritz Oberhettinger - Tables of Fourier Transforms and Fourier Transforms of Distributions

[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_spherical_harmonics

[18] https://dlmf.nist.gov/