Mec. Estadística 2022 Clase 16

Radiación de cuerpo negro (Kittel y Kroemer Cap. 4, Reif Cap. 9)

Analizamos el siguiente experimento: Una cavidad opaca se mantiene a temperatura *T*. Las vibraciones térmicas de las cargas en las paredes de la cavidad producen radiación en el interior de la cavidad que acumula hasta que las paredes absorben tanto como emiten, es decir se alcanza equilibrio. Entonces se abre un pequeño agujero y se observa la radiación que sale.

El agujero es el “cuerpo negro” – no refleja. (Cuando la apertura es mucho mas grande que la longitud de onda de la radiación, y la cavidad mucho mas grande que la apertura.)

Usando el ensemble canónico cuántico vamos a calcular cuanta energía hay en las ondas EM en un rango de frecuencias (angulares) desde $\omega-\Delta\omega$ hasta ω .

Para simplificar supongamos que la cavidad es un cubo de lado L con paredes casi perfectos conductores – en cada momento están casi en equilibrio electrostático por mas que los campos EM oscilan.

DIBUJO indicar que ejes x, y, z son adaptados a cubo.

Modos:

El campo eléctrico es una suma de modos.

$$\boldsymbol{E}=e^{-i\omega t}\boldsymbol{E}_0(x,y,z)$$

con
$$E_{0x}=\epsilon_x\cos\left(n_x\pi\frac{x}{L}\right)\sin\left(n_y\pi\frac{y}{L}\right)\sin\left(n_z\pi\frac{z}{L}\right)$$
$$E_{0y}=\epsilon_y\sin\left(n_x\pi\frac{x}{L}\right)\cos\left(n_y\pi\frac{y}{L}\right)\sin\left(n_z\pi\frac{z}{L}\right)$$
$$E_{0z}=\epsilon_z\sin\left(n_x\pi\frac{x}{L}\right)\sin\left(n_y\pi\frac{y}{L}\right)\cos\left(n_z\pi\frac{z}{L}\right)$$

y $\omega=c\|\boldsymbol{k}\|=c\frac{\pi}{L}\|\boldsymbol{n}\|$. Los n_x , n_y , n_z son enteros no-negativos, no mas que uno siendo 0. El vector $\boldsymbol{\epsilon}$ parametriza tanto la amplitud de la onda estacionaria como la polarización del campo eléctrico en esta.

Esto es una suma de 8 ondas planas monocromáticas con $\boldsymbol{k}=\frac{\pi}{L}\underbrace{[\pm n_x,\pm n_y,\pm n_z]}_{\text{signos independientes}}$.

Cada onda plana eléctrica esta acompañada por una onda plana monocromática magnética determinado por la Ley de Faraday $-\dot{\boldsymbol{B}}=\nabla\times\boldsymbol{E}$, que reduce en este caso a $i\omega\boldsymbol{B}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$. Los campos magnéticos suman a

$$B_{0x}=\beta_x \sin\left(n_x \pi \frac{x}{L}\right)\cos\left(n_y \pi \frac{y}{L}\right)\cos\left(n_z \pi \frac{z}{L}\right)$$
$$B_{0y}=\beta_y \cos\left(n_x \pi \frac{x}{L}\right)\sin\left(n_y \pi \frac{y}{L}\right)\cos\left(n_z \pi \frac{z}{L}\right)$$
$$B_{0z}=\beta_z \cos\left(n_x \pi \frac{x}{L}\right)\cos\left(n_y \pi \frac{y}{L}\right)\sin\left(n_z \pi \frac{z}{L}\right)$$

con $\boldsymbol{\beta}=-\frac{i}{c}\frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}\times\boldsymbol{\epsilon}$.

> Se puede llegar a estos modos de la siguiente manera. Primera expanda la dependencia temporal de los campos en modos de Fourier $e^{-\omega t}$. Porque ni las ecuaciones de Maxwell, ni las condiciones de borde cambian en el tiempo, las condiciones sobre los campos no mezclan campos de distinta frecuencia. Si las condiciones tienen una solución no cero en cierta frecuencia ω entonces esta solución es un modo de oscilación del campo EM.
> Dentro la cavidad no hay cargas. Entonces los campos deben satisfacer la ecuación de ondas ahí. Esto implica que todos los campos de frecuencia ω son sumas de ondas monocromáticas planas $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ con $\omega=c\|\boldsymbol{k}\|$. Las condiciones de borde que $\boldsymbol{E}$ debe ser perpendicular a la superficie de las paredes y que la componente perpendicular tenga derivada normal cero en la superficie (por la ley de Gauss) implican que el campo eléctrico de los modos sea de la forma dada. Los campos magnéticos de frecuencia ω que los acompañan son determinadas por la ley de Faraday, como ya indicado, y satisfacen automáticamente sus condiciones de borde – que sean siempre tangenciales a las paredes.

La Ley de Gauss, $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$, en el interior de la cavidad implica que $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\epsilon}=0$ o uno de los n_i es 0. Entonces hay dos modos independientes para cada $\boldsymbol{n}$ - dos direcciones de $\boldsymbol{\epsilon}$ independientes – si todos los n_i son mayores que 0, y un modo para cada $\boldsymbol{n}$ con un componente 0.

En cada modo los campos oscilan como sinusoides en el tiempo – como osciladores armónicos. De hecho se puede mostrar que el Hamiltoniano de un modo es el Hamiltoniano estándar de un oscilador armónico cuando es expresado en términos de coordenadas canónicas.

Así se va modelar cada modo como un oscilador armónico cuántico.

Energía por modo:

Consideramos un solo modo - un oscilador.

Corremos el cero de energía tal que el estado fundamental tiene energía $E_0=0$. Entonces los niveles de energía son $E_n=n\hbar\omega$, y

$$Z_{modo}=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\hbar\omega}=\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$$.

La energía contribuido por $\boldsymbol{n}$ es

$$-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_{modo}=\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)\right]=\frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

Esto es el valor esperado de la energía del modo. La verdadera energía puede tener muchos valores. Pero en la situación que nos interesa veremos que hay muchos modos con frecuencias muy similares y este valor esperado da el promedio de las energías de estos modos.

Modos por rango de frecuencias:

¿Cuantos modos hay con $\|\boldsymbol{n}\|<R$?

Los n_i son no-negativas. Así, los $\boldsymbol{n}$ con $\|\boldsymbol{n}\|<R$ ocupan un octante de una bola (esfera sólida). Ignorando la complicación de modos con un n_i cero, tenemos que el numero de modos con $\|\boldsymbol{n}\|<R$ es

$$N(R)\sim 2\times\frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{\pi}{3}R^3 \quad ,$$

porque los $\boldsymbol{n}$ tienen densidad 1 en el octante, y porque hay dos modos por $\boldsymbol{n}$.

DIBUJO

> Nota que vamos a suponer siempre que la temperatura τ es mucho mas grande que la energía de un fotón en el modo fundamental de la cavidad, $\hbar c\,\pi/L=k_B 0{,}72\,K\times\frac{1\,cm}{L}$. Entonces el ensemble canónico va ser dominado por estados en que están excitados modos con $n_i\gg 1$. Nos alcanza entonces una expresión para el numero de modos $N(R)$ que es valido para $R\gg 1$.

Siendo mas cuidadosos con los excepcionales modos con un n_i cero obtenemos

$$8N\sim 2\times\frac{4\pi}{3}R^3-6R+3-1$$

Aquí hemos imaginado que juntamos 8 copias del conjunto de $\boldsymbol{n}$s en el primer octante para formar una esfera completa. Para cada $\boldsymbol{n}$ con todos $n_i>0$, es decir fuera de los planos de coordenadas, hay 2 modos. Los $\boldsymbol{n}$ con un solo componente cero tienen un modo cada uno, pero aparece en dos octantes. Finalmente, los $6R-3$ $\boldsymbol{n}$s con dos componentes cero y $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$ son excluidos.

Para $R\gg 1$ tenemos de nuevo $N(R)\sim\frac{\pi}{3}R^3$.

Entonces ¿cuantos modos hay en el rango de frecuencias $(\omega-\Delta\omega,\omega)$?

$\omega = c\frac{\pi}{L}\|\boldsymbol{n}\|$, entonces hay $N(\frac{\omega L}{\pi c}) \sim \frac{\omega^3 L^3}{3\pi^2 c^3}$ modos con frecuencia menor que ω , y $\frac{\partial N}{\partial \omega}\Delta\omega \sim \frac{\omega^2 L^3}{\pi^2 c^3}\Delta\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 \Delta\omega$ modos con frecuencias angulares en $(\omega - \Delta\omega, \omega)$.

Energía por rango de frecuencias:

Juntando estos dos resultados obtenemos la energía EM en ondas estacionarias de frecuencias en el rango $(\omega - \Delta\omega, \omega)$:

$$u_\omega V \Delta\omega = V \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\Delta\omega \quad .$$

$u_\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$ es la "densidad espectral", la energía por unidad de volumen de cavidad y por unidad de banda de frecuencia angular. Esta formula para u_ω es una manera de expresar la ley de radiación de Planck.

Con equipartición todos los modos no pueden llegar a un equilibrio común de temperatura mayor que cero porque para esto hace falta una energía infinita aun en volumen finito. ¿Cual es la energía EM total en la cavidad según mecánica estadística cuántica?

$$E = V\int_0^\infty u_\omega d\,\omega = \frac{\tau^4 V}{\pi^2 \hbar^3 c^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx$$

Es claro que el integral es finito. Cuando $x \to 0$ el integrando se acerca asintóticamente a x^2 y para $x \to \infty$ es asintótico a $x^3 e^{-x}$. Así, el integral no diverge ni en cero ni en ∞ . La energía es entonces finita!

Resulta que $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx = \pi^4/15 = 6{,}49$. Entonces la densidad de energía es

$$\frac{E}{V} = \frac{\pi^2}{15\hbar^3 c^3}\tau^4$$

Esta relación es una forma de la ley de Stefan-Boltzmann. Stefan lo encontró empíricamente y Boltzmann mostró usando termodinámica (en 1884 bien antes que Planck propuso su ley de radiación) que la densidad de energía debe ser proporcional a la temperatura a potencia 4.

Nota que el integral de $\frac{x^3}{e^x - 1}$ desde 0 hasta 1 es solo 0,22. Entonces mientras τ es mayor que la energía de una excitación del modo fundamental ,

$\hbar c\,\pi/L = k_B 0{,}72\,K\times\frac{1\,cm}{L}$, 97% de la energía viene de modos con mayor frecuencia.

Entonces nuestro cálculo de u_ω debe ser mas o menos bien si la temperatura en Kelvin es mayor que $0{,}72\,K\times\frac{1\,cm}{L}$, y muy bien si la temperatura es bien encima de este valor.

Radiación saliendo por un agujero en la cavidad

Hemos tratado hasta ahora la radiación dentro de la cavidad. ¿Que se observa si se abre un pequeño agujero en la cavidad y se mide la radiación que sale?

La intensidad de la radiación en el intervalo $(\omega - d\,\omega, \omega)$ de frecuencia angular , la energía lumínica que sale por unidad de tiempo e unidad de área, es $J_\omega d\,\omega = \frac{c}{4} u_\omega d\,\omega$.

Argumento: Cada modo es una onda estacionaria de la cavidad cerrada. Cuando se abre el agujero se resta del campo la onda reflejada del pedazo de la pared que se saca. (Dado que este pedazo es muy chico no se cambia mucho el campo salvo en la apertura misma.) Entonces en la apertura el campo consiste solo de la parte de la onda estacionaria que esta propagando hacia la pared de la apertura. El flujo del vector de Poynting de esta parte es la contribución del modo a la intensidad de radiación saliente.
Nota que la parte de la onda propagando hacia la pared consiste de la suma de 4 de los 8 ondas planas que componen el modo.

El vector de Poynting promedio de una onda plana con vector de onda $\boldsymbol{k}$ es $\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^* = c\,u\frac{\boldsymbol{k}}{\|\boldsymbol{k}\|}$ con u la densidad media (en tiempo) de la energía en la onda, y su flujo a través de la apertura es $c\,u\,A\cos\theta$, con A el área de la apertura y θ el angulo entre $\boldsymbol{k}$ y el normal saliente en la apertura.

DIBUJO

En el vector de Poynting medio de la suma de los 4 ondas propagando hacia la apertura hay términos cruzadas que son productos de campos de dos ondas planas distintas.
Pero vamos a suponer que la longitud de onda del modo que estamos considerando es mucho mas chico que la apertura. Entonces los términos cruzadas, que oscilan en el espacio con esencialmente esta longitud de onda, integran casi a cero sobre la apertura.
(Mas precisamente, los términos cruzados son despreciables cuando el diámetro de la apertura es mucho mayor que la longitud de onda de la restricción de los campos al plano de la apertura - $2L/(n_x^2 + n_y^2)$ si la apertura esta en el plano xy - lo cual vamos a suponer.)

Desechando los términos cruzados quedamos con que la potencia de la radiación que escapa en una banda de frecuencias es simplemente el flujo de la suma de los vectores de Poynting promedio de todos las ondas planas que propagan hacia la apertura en los modos en la banda de frecuencias.

La densidad media de energía en cada onda plana es ⅛ de la densidad media de energía en el modo, y junto en los 4 ondas propagando hacia la apertura es ½ de la densidad media en el modo.

Los vectores de onda, $\boldsymbol{k}$, de las ondas planas de los modos en la banda de frecuencias $(\omega - d\,\omega, \omega)$ que propagan hacia la apertura están distribuidos casi uniformemente sobre el hemisferio con $\cos\theta > 0$ y radio $\|\boldsymbol{k}\| = \frac{\omega}{c}$.

Entonces $A\,J_\omega d\,\omega = c\,A\frac{1}{2}u_\omega d\,\omega \langle\cos\theta\rangle_{hemisferio}$, donde el promedio de $\cos\theta$ sobre el hemisferio es

$$\langle\cos\theta\rangle_{hemisferio} = \frac{1}{2\pi}\int_{hemisferio}\cos\theta\sin\theta d\,\phi d\,\theta = \int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\,\theta = \int_0^1 x\,dx = 1/2 \quad .$$

De esto se concluye que $J_\omega d\,\omega = \frac{c}{4}u_\omega d\,\omega$.

Nota:

1. El mismo resultado se obtendrá tratando a la radiación como un gas de fotones – partículas de luz – todos moviendo con velocidad *c*.

2. J_ω es simplemente proporcional a u_ω . Es decir la radiación que emerge es una fiel muestra de la radiación dentro la cavidad. Esto no es así para un gas de partículas masivas en el cual partículas con mayor energía, y por tanto velocidad, son sobre representadas en la muestra que sale respecto al interior del recipiente porque llegan a la pared con mayor frecuencia que las partículas de mayor energía. Esta distorsión no se da para radiación en una cavidad porque toda luz propaga con la misma velocidad en vacío.

Entonces $J_\omega = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$.

La intensidad por rango de longitud de onda, $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, es

$$J_\lambda = \left|\frac{d\,\omega}{d\,\lambda}\right| J_\omega = 4\pi^2\hbar c^2\frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\beta 2\pi\hbar c/\lambda} - 1} \quad .$$

(La intensidad con longitudes de onda en el rango $(\lambda - d\,\lambda, \lambda)$ es $J_\lambda d\,\lambda$.)

La ley de Stefan-Boltzmann en términos de la intensidad total I de la radiación que pasa por la apertura es

$$I = \frac{\pi^2}{60\hbar^3 c^2}\tau^4 = \sigma_B T^4 \quad \text{, con} \quad \sigma_B = \frac{\pi^2}{60\hbar^3 c^2}k_B^4 = 5{,}67\times 10^{-8}W\,m^{-2}K^{-4} \quad .$$

Radiación de otras cavidades

Supongamos que dos cavidades distintas tienen aperturas similares, tal que coinciden cuando están puestos una frente a la otra “boca a boca”. Si las dos tienen la misma temperatura entonces deberían estar en equilibrio. Entonces no hay cambio en la distribución de energía entre las cavidades, implicando que la potencia radiada por una debe ser igual a la radiada por la otra.

> Nota que si las dos cavidades a la misma temperatura no están en equilibrio esto se pueden usar para violar a la segunda ley de termodinámica: Si el cubo radia mas potencia que la otra cavidad a la misma temperatura entonces dando al cubo una temperatura un poco menor que la otra todavía habría un flujo neto de energía a la otra cavidad. Entonces calor estaría fluyendo espontáneamente desde un cuerpo mas frio a uno mas caliente. (El flujo de energía lumínica es calor porque no hay trabajo en el experimento que hemos planteado.) Esto implica una reducción de la entropía violando a la segunda ley. Si el cubo radia menos potencia se puede producir una similar violación de la segunda ley.

DIBUJO boca a boca con filtro.

Esto es cierto no solo para la potencia total radiada por la apertura pero también para la potencia en cada polarización y banda de frecuencia, porque se puede poner un filtro entre las dos aperturas tal que solo radiación en una cierta banda de frecuencias dada y de una cierta polarización dada se intercambia entre las cavidades.

Entonces $J_\omega = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$ para la radiación desde una apertura en cualquier cavidad opaca, de cualquier forma y tipo de superficie interior, y que la intensidad es independiente de la polarización – suponiendo, como siempre, que la apertura y la cavidad es muy grande en comparación con las longitudes del las ondas que componen casi toda la radiación en la temperatura del sistema.

(Si no valen estas condiciones sobre la cavidad falla la hipótesis básica del argumento, que cada cavidad esta produciendo radiación igual como si la otra cavidad no estuviera presente, y que el flujo de energía entre las dos cavidades es la suma de los flujos de energía en la radiación producido por cada una.)

Radiación emitida por una superficie

Podemos reemplazar una de las cavidades por una superficie, y concluir que una superficie a temperatura $\tau = 1/\beta$ radia con la misma densidad espectral de intensidad J_ω .

Esto no seria correcto del todo. Muchas superficies materiales reflejan parte de la radiación incidente. Esto ocurre cuando cargas en el material, al ser aceleradas por la radiación incidente emiten radiación pero no excitan otros grados de libertad del material.

Esto contrasta con lo que pasa cuando radiación es absorbido y luego reradiada. En ese caso las cargas aceleradas si transmiten parte de su vibración a otros grados de libertad y a raíz de la consecuente vibración generalizada de las cargas en el material se produce radiación.

La colección de cargas reflectores, o al menos los modos de oscilación de estas excitados por la radiación incidente, son termicamente aislados de los demás grados de libertad del material, y ademas tienen despreciable capacidad calorífica. Entonces al ser iluminadas por radiación térmica desde la apertura de una cavidad reflejan radiación térmica, pero el momento que ya no hay radiación incidente dejan de emitir. Dado que están aislados de los demás grados de libertad calentando a estos a temperatura τ tampoco va causar que los modos reflectores emitan radiación.

Una superficie material que no tiene ningunos modos reflectores también se llama un cuerpo negro, y para estos superficies es correcta la conclusión que radian como una apertura en una cavidad, con densidad espectral de intensidad $J_\omega = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$.

Si la superficie tiene modos reflectores entonces solo una parte, $J_\omega \times a$, de la radiación incidente es absorbido por el material, y es solo esta parte que el material radia al ser calentada a temperatura τ .

a se llama la "absortividad", y puede depender del material, de la frecuencia ω , y de τ .

Ley de desplazamiento de Wien

$J_\omega = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2}\frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1} = \frac{\tau^3}{4\pi^2\hbar^2 c^2}\frac{x^3}{e^x-1}$ con $x=\beta\hbar\omega=\hbar\omega/\tau$. El máximo de J_ω esta en la frecuencia que corresponde al máximo de $\frac{x^3}{e^x-1}$.

DIBUJO de u_ω y J_ω vs. $\hbar\omega/\tau$

$$0=\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x^3}{e^x-1}\right)=\frac{3}{x}-\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{3}{x}-\frac{1}{1-e^{-x}}$$

esto es equivalente a la condición $3(1-e^{-x})=x$. Haciendo graficas de los dos lados es fácil ver que hay solo dos soluciones, $x=0$ y $x=2{,}82$, de la cual la segunda corresponde al máximo de $\frac{x^3}{e^x-1}$.

DIBUJO

Entonces la frecuencia de máxima potencia por ancho de banda de frecuencias es

$$\omega_{max}=2{,}82\frac{k_B}{\hbar}T \quad \text{(porque } \frac{\hbar\,\omega_{max}}{k_B T}=2{,}82 \text{).}$$

Entonces ω_{max} es proporcional a *T.* Esto es la ley de desplazamiento de Wien.

Nota que equipartición funciona bien para osciladores armónicos con $\hbar\omega < \tau$ (dentro de aproximadamente 10%). Así, equipartición funciona hasta este grado para modos en la cavidad con frecuencias hasta $\omega_{max}/2{,}82 = 0{,}35\,\omega_{max}$.

Ejemplo 1: Temperatura de la "superficie" del Sol

Si bien el Sol no tiene superficie solida hay una superficie bastante definida llamada la Fotosfera, desde donde viene la luz que vemos, es decir, donde están ubicados los átomos que son los fuentes de los fotones que recibimos. El gas que compone el Sol es lo suficientemente opaca que no se recibe luz directamente de capas inferiores. Esto se percibe a simple vista ya que el Sol tiene imagen de un disco con borde nítido.

¿Cual es la temperatura del gas en la fotosfera?

Aproximamos este gas como cuerpo negro, es decir, supongamos que la luz esta mas o menos en equilibrio con el gas ahí. Esto es una buena aproximación ya que la absortividad (= emisividad) de la fotosfera es $\simeq 0{,}99$.

El espectro del solo se ajusta bastante bien a lo de un cuerpo negro con $\omega_{max} = 2\pi \times 3{,}43 \times 10^{14}\,Hz$.

Entonces $T = \dfrac{1}{2{,}82}\dfrac{\hbar\omega_{max}}{k_B} = \dfrac{1{,}05 \times 10^{-34}\,Js \times 2 \times 3{,}14 \times 3{,}43 \times 10^{14}\,s^{-1}}{2{,}82 \times 1{,}38 \times 10^{-23}\,J/K} = 5812\,K$.

Nota: $\omega_{max} = 2\pi \times 3{,}43 \times 10^{14}\,Hz$ corresponde a infrarojo cercano – longitud de ondas $\simeq 900\,nm$. Por otro lado, el máximo de J_λ , la intensidad por ancho de banda en longitud de onda, para la misma temperatura esta en $\lambda_{max} \simeq 490\,nm$, que es verde.

Ejemplo 2: Temperatura de la superficie del un planeta orbitando una estrella.

Aproximamos estrella y planeta por cuerpos negros. Sea T la temperatura de la estrella, R_E el radio de la estrella, r el radio de la orbita (supuesto circular), y R_P el radio del planeta.

Por la ley de Stefan-Boltzmann la potencia radiada por la estrella es $P_E = 4\pi R_E^2 \sigma_B T^4$.

La potencia recibida por el planeta es $P_P = \dfrac{\pi R_P^2}{4\pi r^2} P_E = \pi R_P^2 \left(\dfrac{R_E}{r}\right)^2 \sigma_B T^4$.

DIBUJO

En régimen estacionario el planeta radia tanta potencia como recibe. (Otros fuentes de energía que la estrella suponemos que sean despreciables.) Si el planeta tiene temperatura T_P uniforme entonces radia $P_P = 4\pi R_P^2 \sigma_B T_P^4$. Entonces

$T_P^4 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{R_E}{r}\right)^2 T^4$, es decir $T_P = \sqrt{\dfrac{R_E}{2r}}\,T$.

Ponemos números para la Tierra y el Sol: $r=1{,}50\times10^8 km$, $R_E=6{,}97\times10^5 km$ (radio de la fotosfera), $T=5812K$. Entonces $T_P=280K=7^\circ C$.

Esto no se aleja demasiado de la temperatura media de $288K=15^\circ C$ que se observa. La diferencia se debe al efecto invernadero – que la absortividad es mayor en las frecuencias de la luz que recibe la Tierra que en las frecuencias, mas bajas, que radia – y que los polos son mas fríos, y por tanto radian menos, que el ecuador.

> Notas. El efecto invernadero es principalmente natural, pero ha aumentado por cerca de $1^\circ C$ por intervención del hombre.
> He definido a la temperatura *sin* efecto invernadero como la temperatura que resulta cuando la absorptividad es igual en todas frecuencias. Parece ser convencional usar una definición algo distinta que supone que la Tierra absorbe luz solar con la absorptividad observada ($\simeq 0{,}7$) pero radia como un cuerpo negro (absorptividad 1). Esto da un valor mas bajo para la temperatura sin efecto invernadero, pero es solo cuestión de la definición de “sin efecto invernadero”. No representa una diferencia en predicciones físicas.

Ejemplo 3: Radiación cósmica de trasfondo.

Hay un trasfondo de radiación en el Universo que es casi de cuerpo negro en un cierto referencial inercial. En este referencial es casi isotropico con temperatura 2,725 K.

La explicación según la cosmología Big Bang es la siguiente:

Hace mucho tiempo el Universo estaba lleno de un plasma de núcleos, electrones y fotones en equilibrio en una alta temperatura.

El Universo se expendio adiabaticamente enfriando el plasma hasta que los núcleos y electrones formaban átomos neutros, desacoplándose casi completamente de los fotones. Esto ocurrió cuando $T\simeq3000K$.

Desde entonces el campo EM casi no evolucionó – queda en un microestado del macroestado de equilibrio de la época del desacoplamiento en el sentido de que el numero de fotones en cada modo ha permanecido casi igual.

Pero las longitudes de onda de los modos han expandido con la expansión del Universo. Por el teorema adiabático de la mecánica cuántica el numero de fotones en cada modo queda igual, a pesar del hecho que la frecuencia ha cambiado. Este teorema dice que si un sistema esta en un estado propio del Hamiltoniano y el estado propio cambia lentamente, porque el Hamiltoniano cambia, entonces el estado del sistema sigue el estado propio. Si el sistema comienza en el *n* esimo nivel de energía entonces luego estaría todavía en el *n* esimo nivel de energía, aunque este corresponda a un estado distinto que al comienzo del proceso.

Según el ensemble canónico la fracción de los (muchos) modos con frecuencia en una banda muy angosta de frecuencias $(\omega-d\omega,\omega)$ que tiene n fotones es igual a la probabilidad, $\frac{1}{Z}e^{\hbar\omega n/\tau}$, que una de estos modos tenga n fotones.

Al expandirse el Universo por un factor F en todos sus dimensiones espaciales las longitudes de ondas de los modos expanden por el mismo factor: $\lambda \rightarrow \lambda' = F\lambda$. Entonces $\omega = c/\lambda \rightarrow \omega' = \omega/F$

Pero al dividir todas las frecuencias por F la distribución de fotones sobre los modos es todavía una distribución de equilibrio térmico, en temperatura $\tau' = \tau/F$!

$$e^{\hbar\omega n/\tau} = e^{\hbar\omega' n/\tau'} \quad .$$

Cuando se hace un proceso adiabático esto es lo que siempre pasa, pero porque hay un mecanismo (como colisiones entre partículas) que continuamente restaura el equilibrio. Aquí no hay tal mecanismo. Los fotones no interactúan entre si. Pero expansión isotropica nunca saca al sistema de equilibrio. Si hubiera una expansión no isotropica la radiación de trasfondo cósmica no estaría en equilibrio, y no tendría una sola temperatura. Y de hecho hay pequeñas desviaciones de isotropía y correspondientes variaciones en la temperatura.

Se observa que la radiación cósmica tiene temperatura 2,7 K hoy. De esto se concluye que $F \simeq 3000/2{,}7 \simeq 1000$. Es decir, que el Universo ha expandido por un factor de 1000 desde el desacoplamiento de la radiación electromagnética.

No es totalmente obvio que es legitimo modelar al Universo como una cavidad resonante que expande, especialmente si es especialmente infinito, que tal vez lo es. Tampoco es obvio que la aplicación de mecánica cuántica no-relativista es legitima. Pero el mismo resultado se puede obtener de una manera completamente distinta: La reducción de frecuencia $\omega \rightarrow \omega/F$ se debe al efecto Doppler. Si el referencial de reposo del observador esta transportado paralelamente atrás en el tiempo por la linea mundo del fotón hasta el evento de emisión del fotón se encuentra que en este referencial el emisor se esta alejando rápidamente del observador. No lo desarrollare este enfoque cuantitativamente. Pero lleva a la misma conclusión como el calculo que hicimos.