ALN 2022
Clase 12
11/10/

# Ejemplos de Nº de Condición

## 1) Raíces de Polinomios

Recordar que la variedad solución puede describirse como.

$$V = \{ (p,\zeta) \in \mathcal{P}_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} : p(\zeta) = 0 \}.$$

Es decir $V = F^{-1}(0)$ siendo $F : \mathcal{P}_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ el mapa evaluación $F(p,x) = p(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$

donde identificamos $\mathcal{P}_d(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{d+1}$ via sus coeficientes.

Considerando la norma Euclídea $\|p\|^2 = \sum_{i=0}^{d} |a_i|^2$ podemos calcular el nº de condición (y $|\cdot|$ valor absoluto en $\mathbb{C}$).

$0 = p(\zeta) = \sum_{i=0}^{d} a_i \zeta^i$

Notando $\dot{p} = (\dot{a}_0, \ldots, \dot{a}_d)$ y diferenciando como antes tenemos del teo. de función implícita

$$DF(p,\zeta)(\dot{p},\dot{\zeta}) = \dot{p}(\zeta) + p'(\zeta)\,\dot{\zeta} = 0 \quad \text{y por lo tanto} \quad \boxed{\dot{\zeta} = -\frac{\dot{p}(\zeta)}{p'(\zeta)}}$$

Recordar que $(p,\zeta) \in V \setminus \Sigma'$ sii $p'(\zeta) = \frac{\partial F}{\partial \zeta}(p,\zeta)$ es invertible (en este caso como mapa de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, es equivalente $p'(\zeta) \neq 0$).

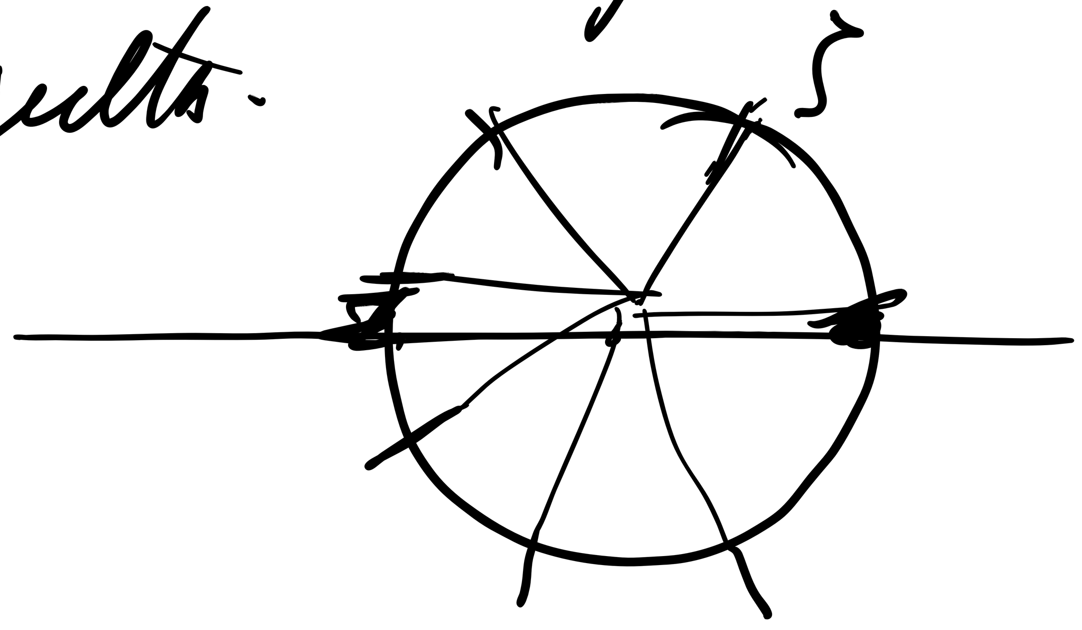
Luego $\mu(p,\zeta) = \sup_{\|\dot{p}\|=1} \|\dot{\zeta}\| = \max_{\|\dot{p}\|=1} \frac{|\dot{p}(\zeta)|}{|p'(\zeta)|} = \frac{1}{|p'(\zeta)|} \max_{\|\dot{p}\|=1} |\dot{p}(\zeta)|$.

Observando que $\dot{p}(\zeta) = \left\langle \begin{pmatrix} \dot{a}_0 \\ \vdots \\ \dot{a}_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \vdots \\ \zeta^d \end{pmatrix} \right\rangle$, por C-S resulta

$$\underline{\mu(p,\zeta) = \left( \sum_{i=0}^{d} |\zeta|^{2i} \right)^{1/2} \Big/ |p'(\zeta)|}$$

Veamos un caso particular.

Si tomamos $f(z)=z^d-1$, $z\in\mathbb{C}$, entonces si $\zeta$ es cualquier solución (raíz $d$-ésima de la unidad) resulta



$$\mu(f,\zeta)=\frac{\sqrt{d+1}}{d}.$$

## 2) Valores y vectores propios

Veamos el caso simétrico para simplificar. $A\in Sym(n)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $v\in\mathbb{R}^n$ tq $\|v\|^2=1$ (i.e. $v\in S^{n-1}$).

La variedad solución está dada por

$$V=\left\{(A,\lambda,v)\in Sym(n)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : \begin{array}{l}(\lambda I_n-A)v=0\\ \|v\|^2=1\end{array}\right\}.$$

Se puede probar que $(A,\lambda,v)\in\Sigma'$ sii la multiplicidad algebraica de $\lambda$ es mayor que $1$. (En el caso simétrico es equiv. a la multiplicidad geométrica)

Una forma de ver esto es considerar el mapa

$$\begin{aligned}F: Sym(n)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\\ (A,\lambda,v)&\longmapsto ((A-\lambda I_n)v,\ \|v\|^2-1)\end{aligned}$$

y observar que $V=F^{-1}(0)$, y además

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial v}(A,\lambda,v)\,\dot v=\begin{pmatrix}(A-\lambda I_n)\dot v\\ 2\langle v,\dot v\rangle\end{pmatrix}\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(A,\lambda,v)\,\dot\lambda=\begin{pmatrix}-\dot\lambda v\\ 0\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Luego, derivando respecto a $v$ y $\lambda$ obtenemos → nuestro output.

$$\frac{\partial F}{\partial(v,\lambda)}(A,\lambda,v) = \left(\begin{array}{c|c} (A-\lambda I_n) & -v \\ \hline v^T & 0 \end{array}\right)$$

Cuando $(A,\lambda,v) \in V$ el operador lineal anterior es invertible sii $\Pi_{v^\perp}(A-\lambda I_n)|_{v^\perp}$ es invertible, y eso es equivalente a que $\lambda$ es simple. (Observar que si $A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}$ entonces $A-\lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda-\lambda_1 & & \\ & \lambda_2-\lambda & \\ & & \lambda_n-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \lambda_2-\lambda & \\ & & \lambda_n-\lambda \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \Pi_{e_1^\perp}(A-\lambda I_n)|_{e_1^\perp} = \begin{pmatrix} \lambda_2-\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n-\lambda \end{pmatrix}.)$$

Más adelante veremos que si estudiamos por separado como se perturban $\lambda$ y $v$ en función de perturbaciones de $A$ resulta

$$\mu_v(A,\lambda,v) = \| (\Pi_{v^\perp}(A-\lambda I_n)|_{v^\perp})^{-1} \| = \frac{1}{\min_{i=2-n} |\lambda-\lambda_i|}$$

↳ los otros valores ppios

$$\mu_\lambda(A,\lambda,v) = 1 \quad \text{(en el caso simétrico)}.$$

Lo anterior resulta de analizar la ecuación $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} (A_t-\lambda_t I_n)v_t = 0$.

$$(\dot A - \dot\lambda I_n)v + (A-\lambda I_n)\dot v = 0 \qquad (v_t \in S^{n-1} \Rightarrow \dot v \perp v)$$

$$\Leftrightarrow \dot A v + (A-\lambda I_n)\dot v = \dot\lambda v$$

$$\Rightarrow \Pi_{v^\perp}\dot A v + \Pi_{v^\perp}(A-\lambda I_n)|_{v^\perp}\dot v = 0$$

$\Rightarrow \dot v = -\left(\Pi_{v^\perp}(A-\lambda I_n)|_{v^\perp}\right)^{-1}\Pi_{v^\perp}\dot A v$, y por otro lado como $(A-\lambda I_n)v^\perp \subset v^\perp$ se tiene $\dot\lambda = v^T \dot A v$.

En el caso general ($A$ no simétrica) si $u$ es el vector propio asociado a $\lambda$ a izquierda: $u^T(A-\lambda I_n)=0$ resulta de multiplicar a " por $u^T$

$$\dot{\lambda} = \frac{u^T \dot{A} v}{u^T v}$$

y en este caso se tiene $\mu_\lambda(A, \lambda, v) = \dfrac{1}{|\langle v, u\rangle|}$

(Observar que si $u \perp v \Leftrightarrow m_{alg}(\lambda) > 1$.)

## Teorema de Nº de Condición

Hay un principio general que dice que el nº de condición está relacionado con el inverso a la distancia de inputs mal condicionados.

Ya vimos el caso de sistemas lineales.

En el caso de raíces de polinomios o vectores propios se pueden probar un resultado del tipo:

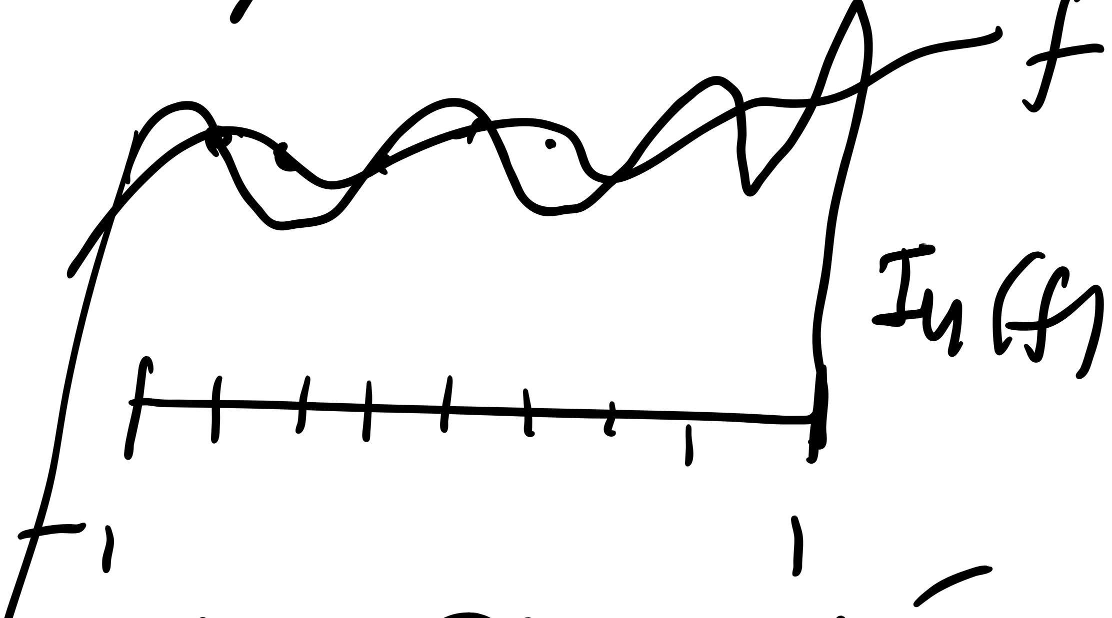
$$\mu(a, x) = \frac{1}{d(a, \Sigma_x)} \qquad \text{siendo } \Sigma_x = \pi_1(\Sigma' \cap \pi_2^{-1}(x))$$

i.e $\Sigma_x$ son los inputs que tienen a $x$ como output.

Es decir ~~a~~ $\mu(a,x)$ es el inverso de la distancia en la fibra a los mal condicionados.

# Interpolación

Consideremos el operador de interpolación $I_n : C[-1,1] \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ que dado una función continua $f \in C[-1,1]$ te da el polinomio que interpola por ejemplo en los $n+1$-puntos equidistribuidos en $[-1,1]$.




Observar que $I_n$ es un operador lineal.
Además $I_n(f) = f \quad \forall f \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$
por lo que si vemos $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset C[-1,1]$ es una proyección.

El nº de condición para este problema es muy sencillo debido que el mapa solución, el mismo $I_n$, es lineal, por lo que el nº de condición es $\| I_n \|$.

Analicemos el caso en que consideramos la $\|\cdot\|_\infty$ en $C[-1,1]$ y $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ como subespacio. En este caso $\|I_n\|_\infty$ se llama constante de Lebesgue.

¿Cómo es $\|I_n\|$? El ejercicio 12.2 de Trefethen es para visualizar esto, y mostrar que la interpolación está mal condicionada si consideramos puntos equidistribuidos.

Se puede probar $\exists!\ \hat{p}_n \in \mathcal{P}_n$ que minimiza $\|f - p\|_\infty$ con $p \in \mathcal{P}_n$. Recordar que en mínimos cuadrados aparecía algo similar.

Entonces
$$\underbrace{\| f - I_n(f) \|_\infty}_{\text{error de interp.}} \leq \| f - \hat{p}_n \|_\infty + \| \underbrace{\hat{p}_n}_{= I_n(\hat{p}_n)} - I_n(f) \|_\infty$$
$$\leq (1 + \|I_n\|) \underbrace{\|f - \hat{p}_n\|_\infty}_{\text{mejor aprox. uniforme}}.$$

(Recordar que del teo de Weierstrass sabemos $\|f - \hat{P}_n\|_\infty \xrightarrow[n]{} 0$)

La desigualdad $\|f - I_n(f)\|_\infty \leq (1 + \|I_n\|) \cdot \|f - \hat{P}_n\|_\infty$

muestra que cuanto mejor se aproxime f a polinomios, mejor será el error de interpolación. Sin embargo, $\|I_n\|$ no está acotado uniformemente, aún en el caso de tomar otros nodos.

En el caso de nodos equidistribuidos $\|I_n\| \sim 2^{n+1}/e\, n \log n$.

La idea del ejercicio 12.2 es ver experimentalmente esta equivalencia.