Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2022

Práctico 6

En este repartido V es un $\mathbb{k}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, con $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. El producto interno en $\mathbb{k}^n$ es el usual.

1. En los casos siguientes, para cada $T \in \mathcal{L}(V)$ hallar el adjunto T^*.

   a) $V = \mathbb{C}^3$, $T(x, y, z) = \big(2x + iy, (1 - i)z - x, iy\big)$.
   b) $V = \mathbb{R}_1[x]$ con el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p\, q$, $T(p) = p'$.
   c) V es un espacio arbitrario, $u, w \in V$ son vectores fijos y $T(v) = \langle v, u\rangle\, w$, para todo $v \in V$.

2. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Probar.

   a) Si T es invertible, entonces T^* es invertible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
   b) Vale $(\operatorname{Im} T^*)^\perp = \operatorname{Ker} T$. Deducir $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.
   c) Los operadores TT^* y T^*T son semipositivos. Si además T es invertible, entonces son positivos.

3. Sea $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$. Probar:

   a) Si T satisface $\langle T(v), v\rangle = 0$ para todo $v \in V$, entonces $T = 0$.
   Sugerencia: sustituir v por $v + w$ y luego por $v + iw$.
   b) El operador T es autoadjunto si y solo si $\langle T(v), v\rangle$ es real, para todo $v \in V$.
   Sugerencia: usar la parte anterior para probar $T^* = T$.
   c) ¿Es cierta la afirmación de la parte $3a$ cuando $\mathbb{k} = \mathbb{R}$? Justificar la respuesta.

4. Probar que en el caso complejo, la hipótesis de ser autoadjunto en la definición de operador positivo o semipositivo, es redundante. Mostrar con un contraejemplo que esto es falso en el caso real.

5. Se consideran las siguientes matrices complejas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -\frac{7i}{25} & \frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & \frac{7i}{25} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Probar que cada una de las matrices A anteriores es normal y hallar una base ortonormal del espacio formada por vectores propios de L_A.

6. Probar que una matriz real $A = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ es normal si y solo si $y = z$ o $y = -z$ y $x = t$. Concluir que $A \in M_2(\mathbb{R})$ es normal y no es simétrica si y solo si existen $a, b \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$, tales que $A = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$.

7. Para cada una de los siguientes operadores, determinar si es normal o autoadjunto.

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - 2y, -2x + 5y)$.
   b) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $T(x, y) = (2x + iy, x + 2y)$.
   c) $T = L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1-i & 1+i \\ -1-i & -1+i \end{smallmatrix}\right)$.
   d) $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, $T(p) = p'$, con el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p\, q$.

8. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz antisimétrica no nula. Probar que $L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es normal y no es autoadjunto. Concluir que A es diagonalizable en $M_n(\mathbb{C})$ y no es diagonalizable en $M_n(\mathbb{R})$.

9. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ con $\Bbbk = \mathbb{C}$. Se consideran $T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$ y $T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$.

   a) Probar que T_1 y T_2 son autoadjuntos y vale $T = T_1 + i\,T_2$.

   b) Probar que si $T = S_1 + i\,S_2$ con S_1 y S_2 autoadjuntos, entonces $S_1 = T_1$ y $S_2 = T_2$.

   c) Probar que T es normal si y solo si $T_1T_2 = T_2T_1$.

10. Sea $P \in \mathcal{L}(V)$ una proyección.

    a) Probar que si P es una proyección ortogonal, entonces $\|P(v)\| \leq \|v\|$, para todo $v \in V$. Dar un ejemplo de una proyección para la cual no sea válida la desigualdad anterior.

    b) Probar que si P es normal y $\Bbbk = \mathbb{C}$, entonces P es una proyección ortogonal.

11. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ normal. Probar

$$\ker T = \ker T^*, \quad \operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^*.$$

    Sugerencia: probar primero $\ker T = \ker T^*$, luego probar $\ker T = (\operatorname{Im} T)^\perp$ y después probar $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^*$; para esta última, recordar el ejercicio 2*b*.

12. Sea $w \in \mathbb{R}^2$ un versor. Definimos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante $T(v) = 2\langle v, w\rangle w - v$. Probar que T es una isometría y que valen $T|_{[w]} = \operatorname{Id}$ y $T|_{[w]^\perp} = -\operatorname{Id}$. Concluir que T es una simetría axial de eje $[w]$.

13. Sea $W \subset V$ un subespacio y $P_W \in \mathcal{L}(V)$ la proyección ortogonal sobre W. Probar que $T \in \mathcal{L}(V)$ definida por $T(v) = 2P_W(v) - v$, es una isometría autoadjunta. ¿Cuáles son sus subespacios propios?

14. Se consideran los siguientes pares de matrices A y B.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix};\quad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

    a) Indicar en cada caso si existe una matriz unitaria $Q \in M_3(\mathbb{C})$ tal que $A = QBQ^*$.

    b) En caso de ser posible, hallar una tal Q.

15. Sea $\Bbbk = \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador autoadjunto. Recordar que en el práctico 6 probamos que $T + i\operatorname{Id}$ y $T - i\operatorname{Id}$ son operadores invertibles. Probar que $S := (T + i\operatorname{Id})(T - i\operatorname{Id})^{-1}$ es una isometría.

16. Encontrar una matriz real ortogonal cuya primera fila sea $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

17. Para cada una de las matrices A del ejercicio 5, encontrar una matriz ortogonal o unitaria Q y una matriz diagonal D tal que $A = QDQ^*$.

18. Sea $\Bbbk = \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador invertible. El objetivo de este ejercicio es probar que existen únicos operadores $S, U \in \mathcal{L}(V)$ tales que S es positivo, U es unitario y $T = US$. La factorización $T = US$ se llama la *descomposición polar* de T.

    a) Probar que existe un operador positivo S tal que $S^2 = T^*T$. Notar que S es invertible.

    b) Definimos $U := TS^{-1}$. Probar que U es un operador unitario. Esto termina la prueba de la existencia de la descomposición polar de T.

    c) Probar la unicidad de la descomposición $T = US$, con U unitario y S positivo.
    Sugerencia: si $T = US$ es una tal descomposición, entonces $T^*T = S^2$.