

Nombre:

C.I.:

**Módulo 1 – Segundo parcial.**

**Ejercicio 1.** [12+8=20 puntos] Sea  $x \in \mathbb{R}$ , y consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x+2 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar todos los valores de  $x$  que hacen que  $A$  no sea invertible.

b) Para alguno de los valores de  $x$  calculados, hallar  $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  tal que  $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Respuestas:**

a)  $x = -3, x = 2$ .

b) Si  $x = -3$ :  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  o cualquier múltiplo no nulo.

Si  $x = 2$ :  $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  o cualquier múltiplo no nulo.

**Ejercicio 2.** [10+5=15 puntos] Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar una matriz diagonal  $D$  y una matriz invertible  $P$  tales que  $A = PDP^{-1}$ .

b) Calcular  $\det(A^4)$ .

**Respuestas:**

a)  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  o cualquier múltiplo no nulo en cada columna; también se podrían permutar columnas.

b)  $\det(A^4) = \det(D^4) = 81$ .

**Ejercicio 3.** [5+10+5+5=25 puntos] Se considera una cierta población de hembras en las que hay tres franjas etáreas: jóvenes, adultas, y ancianas. Se sabe que, en promedio, la mitad de las jóvenes se convierten en adultas y que de éstas una de cada cuatro llega a la edad anciana. Además, en la etapa joven las hembras tienen en promedio una hija, mientras que en la adulta tienen en promedio cuatro hijas, y en la anciana no son fértiles.

- a) Hallar la matriz de Leslie que modela el sistema.
- b) Hallar el valor propio dominante de la matriz de Leslie y hallar un vector propio correspondiente.
- c) Decidir si a largo plazo la población tiende a crecer, extinguirse o estabilizarse.
- d) Después de transcurrido un tiempo largo, se determina que hay 100 ancianas en la población. Estimar la cantidad de jóvenes.

**Respuestas:**

a)  $L = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ .

b)  $\lambda = 2$ , con vector propio asociado  $\begin{pmatrix} 32 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

c) La población crece exponencialmente.

d) Los vectores propios asociados a 2 son de la forma  $\begin{pmatrix} 32z \\ 8z \\ z \end{pmatrix}$ , por lo que hay aproximadamente 32 veces más jóvenes que ancianas: 3200.