

Nombre:	C.I.:
---------	-------

Módulo 1 – Segundo parcial.

Ejercicio 1. [12+8=20 puntos] Sea $x \in \mathbb{R}$, y consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x+2 \end{pmatrix}.$$

- a) Hallar todos los valores de x que hacen que A no sea invertible.
- b) Para alguno de los valores de x calculados, hallar $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tal que $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Respuestas:

- a) $x = -3, x = 2$.
- b) Si $x = -3$: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ o cualquier múltiplo no nulo.
- Si $x = 2$: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ o cualquier múltiplo no nulo.

Ejercicio 2. [10+5=15 puntos] Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $A = PDP^{-1}$.
- b) Calcular $\det(A^4)$.

Respuestas:

- a) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ o cualquier múltiplo no nulo en cada columna; también se podrían permutar columnas.
- b) $\det(A^4) = \det(D^4) = 81$.

Ejercicio 3. [5+10+5+5=25 puntos] Se considera una cierta población de hembras en las que hay tres franjas etáreas: jóvenes, adultas, y ancianas. Se sabe que, en promedio, la mitad de las jóvenes se convierten en adultas y que de éstas una de cada cuatro llega a la edad anciana. Además, en la etapa joven las hembras tienen en promedio una hija, mientras que en la adulta tienen en promedio cuatro hijas, y en la anciana no son fértiles.

- a) Hallar la matriz de Leslie que modela el sistema.
- b) Hallar el valor propio dominante de la matriz de Leslie y hallar un vector propio correspondiente.
- c) Decidir si a largo plazo la población tiende a crecer, extinguirse o estabilizarse.
- d) Después de transcurrido un tiempo largo, se determina que hay 100 ancianas en la población. Estimar la cantidad de jóvenes.

Respuestas:

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\lambda = 2$, con vector propio asociado $\begin{pmatrix} 32 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) La población crece exponencialmente.

d) Los vectores propios asociados a 2 son de la forma $\begin{pmatrix} 32z \\ 8z \\ z \end{pmatrix}$, por lo que hay aproximadamente 32 veces más jóvenes que ancianas: 3200.