

Nombre:	C.I.:
---------	-------

Módulo 1 – Segundo parcial.

Ejercicio 1. [12+8=20 puntos] Sea $x \in \mathbb{R}$, y consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x - 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Hallar todos los valores de x que hacen que 1 sea valor propio de A .
- Para alguno de los valores de x calculados, hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $A = PDP^{-1}$.

Respuestas:

- $x = 0, x = 2$.
- Si $x = 0$: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ o cualquier múltiplo no nulo en cada columna; también se podrían permutar columnas.
Si $x = 2$: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o cualquier múltiplo no nulo en cada columna; también se podrían permutar columnas.

Ejercicio 2. [10+5=15 puntos] Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Determinar si la matriz A es invertible o no.
- Calcular $\det(2A^3)$.

Respuestas:

- $\det(A) = 2$, por lo que A es invertible.
- $\det(2A^3) = 2^4 * 2^3 = 128$.

Ejercicio 3. [5+10+5+5=25 puntos] Se considera una cierta población de hembras en las que hay tres franjas etáreas: jóvenes, adultas, y ancianas. Se sabe que, en promedio, una de cada cuatro de las jóvenes se convierte en adulta y que de éstas la mitad llega a la edad anciana. Además, en la etapa joven las hembras tienen en promedio una hija, mientras que en la adulta tienen en promedio tres hijas, y en la anciana no son fértiles.

- a) Hallar la matriz de Leslie que modela el sistema.
- b) Hallar el valor propio dominante de la matriz de Leslie y hallar un vector propio correspondiente.
- c) Decidir si a largo plazo la población tiende a crecer, extinguirse o estabilizarse.
- d) Después de transcurrido un tiempo largo, se determina que hay 100 ancianas en la población. Estimar la cantidad de jóvenes.

Respuestas:

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\lambda = 3/2$, con vector propio asociado $\begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) La población crece exponencialmente.

d) Los vectores propios asociados a $3/2$ son de la forma $\begin{pmatrix} 18z \\ 3z \\ z \end{pmatrix}$, por lo que hay aproximadamente 18 veces más jóvenes que ancianas: 1800.