

Nombre:	C.I.:
---------	-------

Módulo 1 – Segundo parcial.

**Ejercicio 1.** [12+8=20 puntos] Sea  $x \in \mathbb{R}$ , y consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x - 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Hallar todos los valores de  $x$  que hacen que 1 sea valor propio de  $A$ .
- Para alguno de los valores de  $x$  calculados, hallar una matriz diagonal  $D$  y una matriz invertible  $P$  tales que  $A = PDP^{-1}$ .

**Respuestas:**

- $x = 0, x = 2$ .
- Si  $x = 0$ :  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  o cualquier múltiplo no nulo en cada columna; también se podrían permutar columnas.  
Si  $x = 2$ :  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  o cualquier múltiplo no nulo en cada columna; también se podrían permutar columnas.

**Ejercicio 2.** [10+5=15 puntos] Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Determinar si la matriz  $A$  es invertible o no.
- Calcular  $\det(2A^3)$ .

**Respuestas:**

- $\det(A) = 2$ , por lo que  $A$  es invertible.
- $\det(2A^3) = 2^4 * 2^3 = 128$ .

**Ejercicio 3.** [5+10+5+5=25 puntos] Se considera una cierta población de hembras en las que hay tres franjas etáreas: jóvenes, adultas, y ancianas. Se sabe que, en promedio, una de cada cuatro de las jóvenes se convierte en adulta y que de éstas la mitad llega a la edad anciana. Además, en la etapa joven las hembras tienen en promedio una hija, mientras que en la adulta tienen en promedio tres hijas, y en la anciana no son fértiles.

- a) Hallar la matriz de Leslie que modela el sistema.
- b) Hallar el valor propio dominante de la matriz de Leslie y hallar un vector propio correspondiente.
- c) Decidir si a largo plazo la población tiende a crecer, extinguirse o estabilizarse.
- d) Después de transcurrido un tiempo largo, se determina que hay 100 ancianas en la población. Estimar la cantidad de jóvenes.

**Respuestas:**

a)  $L = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ .

b)  $\lambda = 3/2$ , con vector propio asociado  $\begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

c) La población crece exponencialmente.

d) Los vectores propios asociados a  $3/2$  son de la forma  $\begin{pmatrix} 18z \\ 3z \\ z \end{pmatrix}$ , por lo que hay aproximadamente 18 veces más jóvenes que ancianas: 1800.