Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Licenciatura en Matemática
Teoría de Representaciones
Año 2022

Repartido 5: Condiciones de cadena en anillos y módulos.

1. Probar que un módulo es noetheriano si y sólo si todos sus submódulos son finitamente generados.

2. Sea A un dominio de integridad. Probar que todo A-módulo artiniano es de torsión si y sólo si A no es un cuerpo.

3. Probar que M es artiniano si y sólo si todos sus submódulos propios lo son y que la afirmación no es cierta para noetherianos.

4. Un anillo se dice **noetheriano (artiniano) a izquierda/derecha** si y sólo si es noetheriano (artiniano) como módulo a izquierda/derecha sobre sí mismo. Si es noetheriano (artiniano) a ambos lados, se dice que es una **anillo noetheriano**

   a) Probar que un anillo es noetheriano a izquierda/derecha si y sólo si todos sus ideales a izquierda/derecha son finitamente generados.

   b) Deducir que todo dominio a ideales principales es un anillo noetheriano y que es artiniano sí y sólo si es un cuerpo.

   c) Probar que si A es un anillo conmutativo noetheriano, entonces todos sus elementos se descomponen en producto de irreducibles (a es irreducible si y sólo si $a \notin \mathcal{U}(A), a \neq 0$ y si $a = bc$ entonces b o c son invertibles).

   Observar que la prueba de que todo dominio a ideales principales es noetheriano que presentamos acá, no pasa por usar que es un dominio factorial.

5. Sea A un anillo cualquiera. Probar que son equivalentes:

   a) para $n \in \mathbb{N}$ y $M_1, M_2, \cdots, M_n$ A-módulos a izquierda:
      1) $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ es noetheriano (artiniano) a izquierda,
      2) M_i es noetheriano (artiniano) $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

   b) para $n \in \mathbb{N}$ y A un anillo
      1) A es noetheriano (artiniano) a izquierda (derecha),
      2) $M_n(A)$ es noetheriano (artiniano) a izquierda (derecha).

6. Probar que anillo A es noetheriano (artiniano) a izquierda si y sólo si todo A-módulo a izquierda finitamente generado es noetheriano (artiniano).

7. Sean A y B anillos y $f : A \to B$ un morfismo de anillos.

   a) Sea M un B-módulo a izquierda. Probar que si M es noetheriano (artiniano) como A-módulo, entonces también lo es como B-módulo.

   b) Probar que los recíprocos de las partes anteriores no valen.

c) Supongamos ahora que f es un epimorfismo.

1) Probar que si A es noetheriano (artiniano) a izquierda (derecha) entonces B también.
2) Probar que los recíprocos de la parte anterior no valen.

8. Sean R, S anillos y M un (R, S) bimódulo (módulo a izquierda sobre R, a derecha sobre S, con estructuras compatibles en el sentido visto en clase). Se considera el conjunto de matrices

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \mid r \in R, s \in, S, m \in M \right\}$$

a) Probar que A con la suma y multiplicación de matrices usual, define una estructura de anillo.

b) Probar que A es noetheriano (artiniano) a izquierda/derecha si y sólo si R, S lo son y M lo es como R-módulo a izquierda/S-módulo a derecha.

c) Dar un ejemplo de anillo noetheriano a izquierda no a derecha.

d) Dar un ejemplo de anillo artiniano a izquierda no a derecha.

e) Dar un ejemplo de anillo no conmutativo noetheriano a izquierda no artiniano a izquierda.