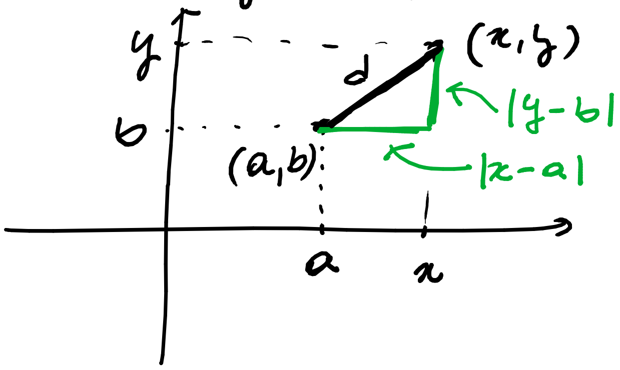
Derivadas parciales

Continuidad:

$f : D \to \mathbb{R}$ (Supondremos $D \subset \mathbb{R}^2$).

f es continua en $(a,b) \in D$ si cuanto más "cerca" está (x,y) de (a,b) más cerca está $f(x,y)$ de $f(a,b)$

distancia de (x,y) a (a,b) $= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

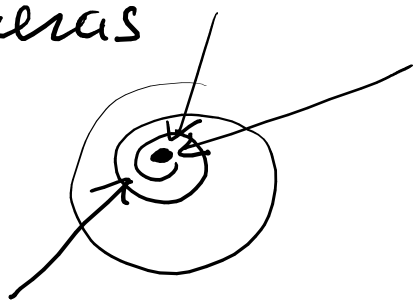


Pitágoras:

$d^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$

f es continua en (a,b) si $\lim\limits_{d \to 0} f(x,y) = f(a,b)$.

La diferencia con $\mathbb{R}$ es que en $\mathbb{R}^2$ nos podemos acercar al punto (a,b) de muchas maneras



Ejemplo:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f(0,y) = 0$, $f(x,0) = 0$

Si ponemos $x = y \Rightarrow f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Si nos acercamos a $(0,0)$ por la recta $y = x$ la función siempre vale $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f no es continua en $(0,0)$.

Definición de derivada: Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función definida en $D \subset \mathbb{R}^n$, la derivada parcial de f respecto a la variable i-ésima en el punto $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ es, si existe, la derivada en a_i de la función de una variable obtenida al dejar fijas todas las demás coordenadas.

La denotamos por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)$.

Si $D \subset \mathbb{R}^2$ $(a,b) \in D$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = ?$$

Considero la función de una variable

$$g(t) = f(t, b)$$

dejo variar la primer entrada

fijo la segunda variable

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ existe si g es derivable en a y en tal caso

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = g'(a)$$

→ Análogamente para $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Si f es derivable en todos los puntos de $D' \subset D$ con respecto a x obtengo una nueva función

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$ derivada parcial de f con respecto a x en el punto $(x,y) \in D'$.

Ejemplos:

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y) = x + 2y + 1$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3,2) = \,?$$

deriv o con respecto a la segunda variable

$$g(t) = f(3,t) = 3 + 2t + 1 = 2t + 4$$

fijo la primer variable

vario la segunda

$$g'(t) = 2$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(3,2) = g'(2) = 2}$$

2) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad : \quad f(x,b) = \operatorname{sen}(x^2 b)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x^2 b) = \cos(x^2 b)\cdot(2xb) =$$

$$= 2bx\cos(x^2 b)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 2ba\cos(a^2 b)}$$

Esta f es derivable con respecto a x y a y en todo $\mathbb{R}^2$.

3) $$\frac{\partial}{\partial x}\left[\log(x^2+y)\right] = \log'(x^2+y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y)$$

variable

fija

$$= \frac{1}{x^2+y}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+y}$$

4) $$\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(xy)\cdot(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\cdot xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{yx^2+y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \boxed{\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}}.$$

Derivadas direccionales.

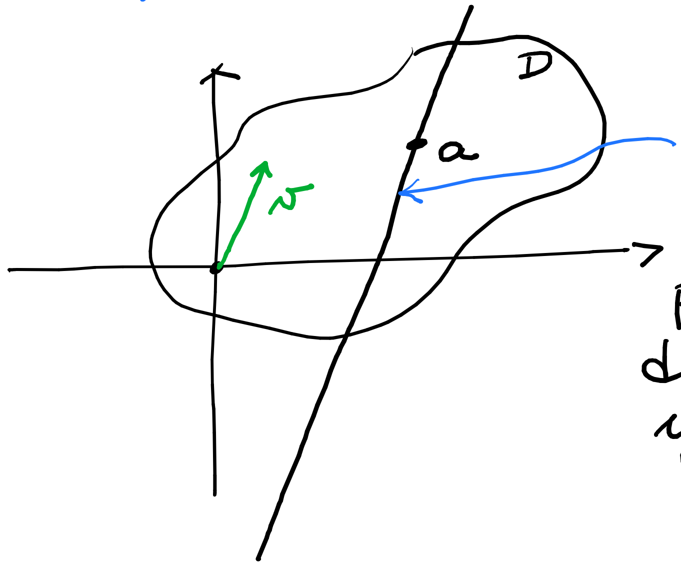
Decimos que $f : D \to \mathbb{R}$, definida en $D \subset \mathbb{R}^n$ es derivable en $a \in D$ en la dirección de $v \in \mathbb{R}^n$ si la función de una variable definida por

$$g(t) = f(a + tv)$$

es derivable en $t = 0$ y en ese caso escribimos

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = g'(0).$$

$\rightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ indica el crecimiento de f en la dirección de v.



Evaluamos f a lo largo de la recta que pasa por a en la dirección de v y derivamos.

Observar: Si $n = 2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es la derivada direccional en la dirección de $(1,0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es la derivada en la dirección de $(0,1)$.

Ejemplos:

1) $f(x,y) = x + 2y + 1$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(3,2)$ para $v = (1,1)$.

$$g(t) = f((3,2) + t(1,1)) = f(3+t, 2+t) =$$

$$= 3+t+2(2+t)+1 = 8+3t$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(3,2) = g'(0) = 3}$$

2) $\frac{\partial}{\partial v} \operatorname{sen}(x^2 y)$ en $(1,\pi)$ para $v = (2,\pi)$

$$f((1,\pi) + t(2,\pi)) = f(1+2t, \pi+\pi t) =$$

$$= \operatorname{sen}\left((1+2t)^2(1+t)\pi\right)$$

derivo con respecto a t:

$$\cos\left((1+2t)^2(1+t)\pi\right) \cdot \left[4(1+2t)(1+t)\pi + (1+2t)^2\pi\right]$$

evalúo en $t=0$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(1,\pi) = \cos(\pi) \cdot (4\pi + \pi) =$$

$$= 5\pi \cos(\pi) = -5\pi.$$

Gradiente.

Si $f: D \to \mathbb{R}$ es una función de varias variables, el gradiente de f en el punto $a \in D$ es el vector cuyas coordenadas son las derivadas parciales de f en a y lo denotamos por $\nabla f(a)$.

Entonces, si $D \subset \mathbb{R}^n$ $a=(a_1,\dots,a_n)$

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

(Siempre que las derivadas parciales existan).

Si las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ son continuas en a, el vector $\nabla f(a)$ nos da una aproximación lineal de f alrededor de a:

$$f(a+h) \approx f(a) + \nabla f(a) \cdot h$$

con un error que tiende a 0 más rápido que h

$h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$

$$\Rightarrow \nabla f(a)\cdot h = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} =$$

$$= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a).$$

Ejemplo: $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

son continuas en $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Pongamos $a = (1,1) \in D$

$$f(1,1) = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ cerca de $(1,1)$ tenemos

$$f(1+h, 1+k) \approx f(1,1) + \nabla f(1,1) \cdot (h,k) =$$
$$= \frac{1}{2} + \left(0, \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2} + 0 \cdot h + \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}(1+k).$$

Teorema: Si $f : D \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales con respecto a todas las variables y éstas son continuas en $a \in D$, entonces existe la derivada direccional de f en el punto a con respecto a todas las direcciones.

Además se tiene $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v}$

Poniendo $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$

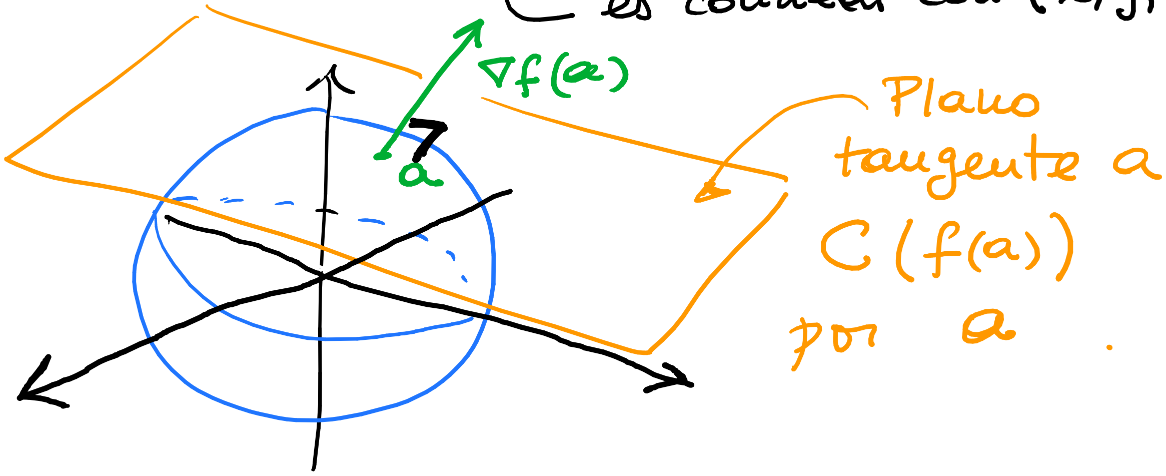
$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a).$$

Interpretación geométrica.

- El gradiente de f en a es un vector perpendicular al conjunto de nivel $k = f(a)$ en el punto a.

Por ejemplo tomemos $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$\longrightarrow \nabla f(x,y,z) = 2(x,y,z)$ es colineal con (x,y,z)

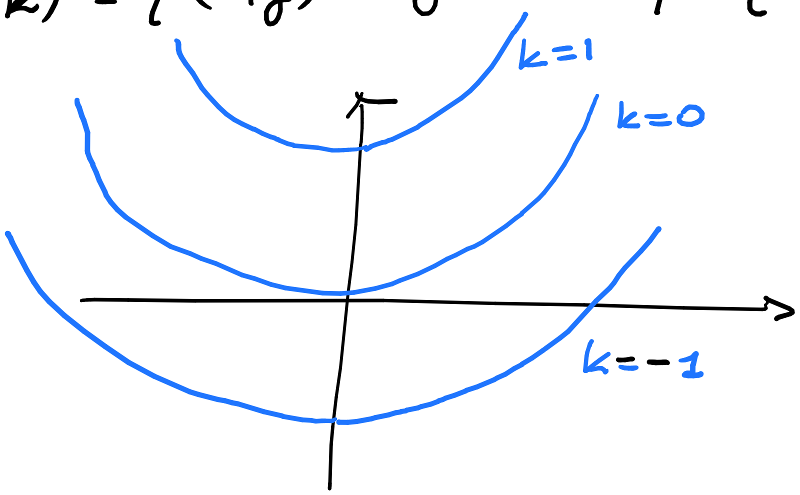


Sea ahora $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = y - x^2$

Las curvas de nivel son

$$C(k) = \{(x,y) : y - x^2 = k\} = \{(x,y) : \underbrace{y = x^2 + k}_{\uparrow\ \text{Parábola}}\}$$



Tomemos $a = (2,3) \Rightarrow f(2,3) = 3 - 2^2 = -1$

$\Rightarrow (2,3) \in C(-1)$

La recta tangente a $C(-1)$ en el punto $(2,3)$ tiene pendiente igual a la derivada de $x^2 - 1$ en $x = 2$, es decir 4.

$\Rightarrow$ recta tangente a $C(-1)$ por el punto $(2,3)$: $y = 4x - 5$

$\rightarrow$ recta $\perp$ a $C(-1)$ por el punto $(2,3)$ tiene pendiente $-\frac{1}{4}$

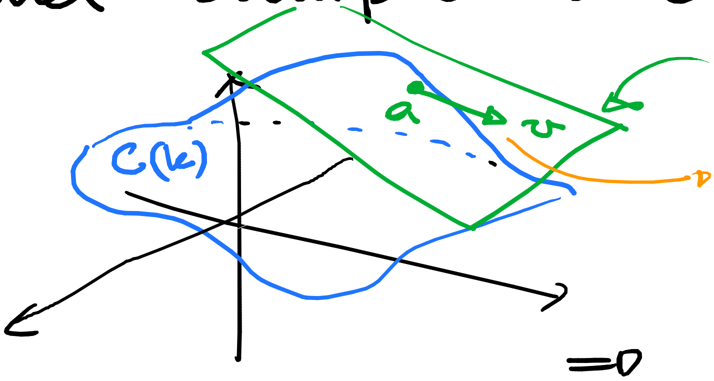
$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}.$$

Por otro lado $\nabla f(x,y) = (-2x, 1)$

$\rightarrow \nabla f(2,3) = (-4, 1)$

tiene la misma dirección que la recta perpendicular a $C(-1)$.

- La derivada direccional de f en una dirección tangente a un conjunto de nivel siempre es 0.



$$\Rightarrow \quad \nabla f(a) \perp v$$

porque $\nabla f(a) \perp C(k)$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\nabla f(a) \cdot v}_{= \frac{\partial f}{\partial v}(a)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0}$$

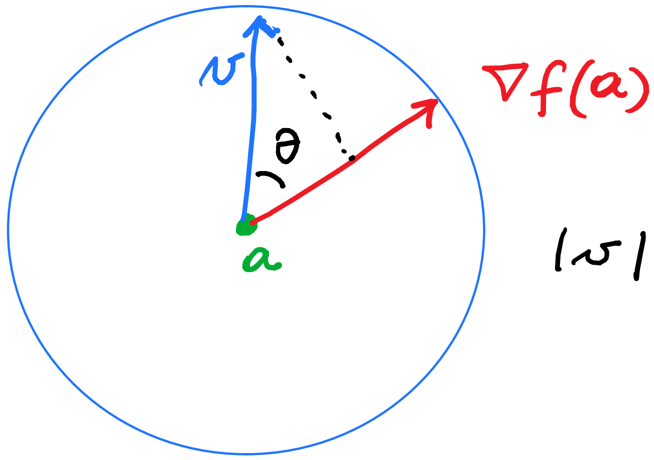
- El vector $\nabla f(a)$ apunta en el sentido del máximo crecimiento de f.

Si ponemos $v = \nabla f(a)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v = \nabla f(a) \cdot \nabla f(a) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)^2$$

Para f de dos variables.



$$|v| = |\nabla f(a)|$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v = |\nabla f(a)|\,|v| \cos\theta =$$

$$= |\nabla f(a)|^2 \cos\theta \leftarrow \text{es máxima en } \theta = 0$$

es decir si $v = \nabla f(a)$.