Bioestadística

Segundo Semestre 2022
Universidad de la República

Nombre:	**CI:**

PRUEBA PARCIAL

15 de Octubre de 2022

Ejercicio 1 La siguiente tabla contiene la cantidad de graduados de una universidad (del año pasado) según el tipo de graduación y el sexo del graduado:

Sexo	Diplomatura	Licenciatura	Maestría	Doctorado	Total
Mujer	616	194	30	16	856
Hombre	529	171	44	26	770
Total	1145	365	74	42	1626

Se elige una persona graduada al azar.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida sea mujer?

(b) Si la persona elegida se graduó de una maestría, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

(c) Considere los sucesos $F =$"la persona elegida es mujer" y $M =$"la persona elegida se graduó de una maestría". ¿Son F y M sucesos independientes? Justifique su respuesta.

Ejercicio 2 Sea X una variable con distribución exponencial de parámetro λ, que mide el tiempo de vida (en años) de un equipo en funcionamiento.

(a) Sabiendo que $\mathbb{P}(X > 4) = e^{-2}$ hallar el valor de λ.

(b) Se tiene otro equipo de repuesto, cuyo tiempo de vida Y tiene la misma distribución exponencial pero con parámetro $1/3$. Si cuando falla el primer equipo se lo reemplaza por el de respuesto, ¿cuál es el valor esperado del sistema formado por los dos equipos?

Ejercicio 3 Sea X una variable aleatoria con distribución $N(0, 1)$, e Y una variable aleatoria con distribución $N(1, 1)$. Se tira una moneda equilibrada. Si sale cara observamos X y si sale seca observamos Y. Sea Z la variable aleatoria observada.

(a) Calcular la probabilidad $\mathbb{P}(Z < 1)$ sabiendo que $\mathbb{P}(X < 1) = 0{,}841$ y que $P(Y < 1) = 0{,}5$.

(b) ¿Cuánto vale $\mathbb{E}(X + 2Y)$?.

(c) Si X e Y son independientes, calcular $var(X + 2Y)$.

SOLUCIÓN

Ejercicio 1

(a) Sea F el suceso $F =$"la persona elegida es mujer", entonces

$$\mathbb{P}(F) = \frac{\#mujeres}{Total} = \frac{856}{1626} \approx 0{,}527$$

(b) $\mathbb{P}(F|M) = \frac{\mathbb{P}(F\cap M)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{\frac{\#F\cap M}{Total}}{\frac{\#M}{Total}} = \frac{\#F\cap M}{\#M} = \frac{30}{74} \approx 0{,}405$

(c) F y M son independientes si y solo si se verifica: $\mathbb{P}(F \cap M) = \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}(M)$, pero:

- $\mathbb{P}(F \cap M) = \frac{30}{1626} \approx 0{,}019$,
- $\mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}(M) = \frac{856}{1626} \times \frac{74}{1626} \approx 0{,}024$,

por lo tanto, F y M NO son independientes.

Ejercicio 2

(a) Sea $X \sim Exp(\lambda)$, entonces $\mathbb{P}(X > 4) = 1 - F_X(4) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda 4}\right) = e^{-4\lambda} = e^{-2}$ si y solo si $\lambda = \frac{1}{2}$.

(b) Sea $Y \sim Exp(1/3)$. El tiempo de vida del sistema es el tiempo de vida del primer equipo (X) más el tiempo de vida del reemplazo (Y). Luego, se pide:

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 5.$$

El tiempo de vida esperado del sistema formado por los dos equipos es de 5 años.

Ejercicio 3 Sean $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 1)$ y $Z = \begin{cases} X, & \text{si sale cara} \\ Y, & \text{si sale seca} \end{cases}$. Notar que $\mathbb{P}(Z = X) = \mathbb{P}(Z = Y) = \frac{1}{2}$ pues la moneda está equilibrada.

(a) $\mathbb{P}(Z < 1) = \mathbb{P}(Z < 1|Z = X)\mathbb{P}(Z = X) + \mathbb{P}(Z < 1|Z = Y)\mathbb{P}(Z = Y) = 0{,}841 \times \frac{1}{2} + 0{,}5 \times \frac{1}{2} \approx 0{,}671$.

(b) $\mathbb{E}(X + 2Y) = \mathbb{E}(X) + 2\mathbb{E}(Y) = 0 + 2 \times 1 = 2$.

(c) Como X e Y son independientes, $var(X + 2Y) = var(X) + 2^2 var(Y) = 1 + 4 \times 1 = 5$.