Nombre:	**CI:**

PRUEBA PARCIAL

20 de Octubre de 2022

Ejercicio 1 Una bolsa de palomitas de maíz contiene 2/3 de granos blancos y 1/3 de granos amarillos. Solo la mitad de los granos blancos estallan al calentarse, mientras que 2/3 de los amarillos lo hacen. Se selecciona un grano al azar de la bolsa.

(a) Calcule la probabilidad de que el grano seleccionado estalle cuando se lo caliente.

(b) Sabiendo que el grano seleccionado estalló al calentarse, ¿cuál es la probabilidad de que el grano seleccionado sea blanco?

(c) Considere los sucesos:

- $E =$"El grano seleccionado estalla"
- $B =$"El grano seleccionado es blanco"

¿Son E y B sucesos independientes? Justifique su respuesta.

Ejercicio 2 Sea X una variable aleatoria con distribución normal $N(\mu, \sigma)$.

(a) Determinar los valores de μ y σ sabiendo que

- $\mathbb{P}(X \leq 17) = 0{,}655$
- $\mathbb{P}(X > 11) = 0{,}788$

Los siguientes datos pueden ser de utilidad:

$qnorm(0{,}212) = -0{,}800 \quad qnorm(0{,}345) = -0{,}399 \quad qnorm(0{,}655) = 0{,}399 \quad qnorm(0{,}788) = 0{,}800.$

(b) Sea $Y = 3X + 2$. Calcular $\mathbb{E}(Y)$ y $\mathbf{var}(Y)$.

Ejercicio 3

Suponga que la duración de una canción se distribuye de manera uniforme entre 2 y 3.5 minutos. Armamos en Spotify una playlist de 20 canciones. Asumimos que los tiempos de duración de estas 20 canciones son independientes.

(a) Calcular la probabilidad de que una canción dure más de 3 minutos.

(b) Sea T el tiempo de duración de la playlist (sin contar anuncios). Calcular $\mathbb{E}(T)$ y $\mathbf{var}(T)$.

(c) El reproductor pone un anuncio cada 30 minutos de música. ¿Cuántos anuncios espera escuchar antes de que se termine la playlist?

Solución

Ejercicio 1 Sean los sucesos:

- $E =$"El grano seleccionado estalla"
- $B =$"El grano seleccionado es blanco"
- $A =$"El grano seleccionado es amarillo"

(a) $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(E|A)\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$.

(b) $\mathbb{P}(B|E) = \frac{\mathbb{P}(E|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{3}{5}$.

(c) $\mathbb{P}(E|B) \neq \mathbb{P}(E)$, por lo tanto E y B no pueden ser independientes.

Ejercicio 2

(a) Observar que:

- $0{,}655 = \mathbb{P}(X \leq 17) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{17-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{17-\mu}{\sigma}\right)$, entonces $\frac{17-\mu}{\sigma} = qnorm(0{,}655)$. Es decir que
$$\frac{17-\mu}{\sigma} = 0{,}399 \Leftrightarrow \mu + 0{,}399\sigma = 17$$
- $0{,}788 = \mathbb{P}(X > 11) = 1-\mathbb{P}(X \leq 11) = 1-\mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{11-\mu}{\sigma}\right) = 1-\Phi\left(\frac{11-\mu}{\sigma}\right)$, entonces $\frac{11-\mu}{\sigma} = qnorm(1-0{,}788)$. Es decir que
$$\frac{11-\mu}{\sigma} = -0{,}800 \Leftrightarrow \mu - 0{,}800\sigma = 11$$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} \mu + 0{,}399\sigma = 17 \\ \mu - 0{,}800\sigma = 11 \end{cases}$ y obtenemos $\mu = 15$ y $\sigma = 5$.

(b) Sea $Y = 3X + 2$.

- $\mathbb{E}(Y) = 3\mathbb{E}(X) + 2 = 3\mu + 2 = 47$
- $\mathbf{var}(Y) = 3^2\mathbf{var}(X) = 9 \times \sigma^2 = 9 \times 25 = 225$

Ejercicio 3

(a) Sea $X \sim U(2, 3{,}5)$, entonces $\mathbb{P}(X > 3) = 1 - F_X(3) = 1 - \frac{3-2}{3{,}5-2} = 1 - \frac{1}{1{,}5} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

(b) Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ (asumimos que son independientes) los tiempos de duración de cada canción, entonces $T = X_1 + X_2 + \cdots + X_{20}$.

- $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{20}) = 20\mathbb{E}(X_1) = 20\frac{2+3{,}5}{2} = 55$ minutos.
- $\mathbf{var}(T) = \mathbf{var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{20}) = 20\mathbf{var}(X_1) = 20\frac{(3{,}5-2)^2}{12} = \frac{5}{3}1{,}5^2 = 3{,}75$ minutos.

(c) Como $\mathbb{E}(T) = 55$ minutos, se espera un solo anuncio antes de que se termine la playlist.