Más ejemplos (continuación de clase 14)

Multiplicación: Análogo a lo anterior, tenemos $a_1 a_2 \in \mathbb{R}$

$M(a_1 a_2) = a_1 \times a_2$ es nuestra función a estudiar

Luego $\tilde{M}(a_1 a_2) = fl(a_1) \otimes fl(a_2) = fl(a_1) \times fl(a_2)(1+\varepsilon)$

y por lo tanto $\tilde{M}(a_1 a_2) = a_1(1+\varepsilon_1) \times a_2(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon)$

$= a_1(1+\varepsilon_1') \times a_2(1+\varepsilon_2')$

donde ε_1' y ε_2' surgen de son $O(\varepsilon_{maquina})$ $\left(= 2\varepsilon_{maquina} + O(\varepsilon_{maq}^2)\right)$ $\left[1+\varepsilon_1' = \underbrace{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon)}_{1+(\varepsilon_1+\varepsilon)+\varepsilon_1\varepsilon} \right]$.

Es decir $\tilde{M}(a_1 a_2) = M(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ con $\frac{\|a_i - \tilde{a}_i\|}{\|a_i\|} = O(\varepsilon_{maquina})$, $i = 1, 2$.

Producto Escalar

Supongamos que queremos realizar el producto escalar entre $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^n$. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.
$\overset{\shortparallel}{f(a, b)}$

El algoritmo que consideramos es el siguiente:

$S_k = S_{k-1} + P_k$

$P_1 = a_1 \cdot b_1$, $S_1 = P_1$, $P_2 = a_2 \cdot b_2$, $S_2 = S_1 + P_2$, ... $P_k = a_k b_k$

Luego tenemos $\tilde{P}_1 = fl(a_1) \otimes fl(a_2) = a_1 b_1 (1+\delta_1)$; $\tilde{S}_1 = a_1 b_1 (1+\delta_1)$

$\tilde{P}_2 = a_2 b_2 (1+\delta_2)$; $\tilde{S}_2 = \left(a_1 b_1 (1+\delta_1) + a_2 b_2 (1+\delta_2)\right)(1+\delta_3)$

i.e.: $\tilde{S}_2 = a_1 b_1 (1+\delta_1)(1+\delta_3) + a_2 b_2 (1+\delta_2)(1+\delta_3)$

Escribiendo $(1+\delta_i)(1+\delta_3)=(1+\delta)^2$ y sucesivamente tenemos que

$$\tilde{S}_n = a_1 b_1 (1+\delta)^n + a_2 b_2 (1+\delta)^n + a_3 b_3 (1+\delta)^{n-1} + \dots + a_n b_n (1+\delta)^2$$

De manera similar a antes tenemos que es backward-stable.

$$\left(\begin{array}{l} \tilde{a} = a(1+\frac{n}{2}\delta) \\ \tilde{b} = b(1+\frac{n}{2}\delta) \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{a}\cdot\tilde{b} = ab(1+\tfrac{n}{2}\delta)(1+\tfrac{n}{2}\delta) \simeq a\cdot b(1+\delta)^n \Bigg)$$

No backward-stable

Supongamos que queremos calcular la matriz A de rango 1 dada por $A = uv^T$ con $u, v \in \mathbb{R}^n$. Para ~~el~~ calcular eso basta calcular $u_i \cdot v_j$ en punto flotante. Esto produce una matriz $\tilde{A} = ((u_i v_j (1+\varepsilon_{ij})))$ pero difícilmente podamos escribir $\tilde{A} = (u+\delta u)(v+\delta v)^T$ dado que no podemos asegurar que $\tilde{A}$ tenga rango 1.

Comentario Final

Vimos que la resta es un algoritmo backward-stable, pero supuestamente esta operación de ~~la~~ la aritmética es el tendón de aquiles. ~~...~~ "Sabemos" que si dos nº son muy cercanos entonces tendremos problemas con las cifras significativas. Veamos esto.

Veamos un ejemplo con el registro de las computadoras

Si $x = \boxed{1|0|0|1|1|1|0|a|b|c|d}$ ~~eee~~ $\boxed{e}$

$\updownarrow$

$y = \boxed{1|0|0|1|1|1|0|a'|b'|c'|d'}$ $\boxed{e}$

$x - y = \boxed{0|0|0|0|0|0|0|a''|b''|c''|d''}$ $\boxed{e}$

$= \boxed{a''|b''|c''|d''|?|?|?|?}\boxed{?|?}$ $[e-6]$

Por lo que hay una pérdida de cifras significativas.

Por ejemplo (en decimales) $1{,}23456789 - 1{,}23456700 = 0{,}00000089 = 8{,}9 \times 10^{-7}$ y por lo tanto teníamos 9 cifras significativas y terminamos con solo 2.

En muchos casos podemos esquivar este problema, como veremos a continuación. Por ejemplo si queremos ~~calcular~~ evaluar la función $\sqrt{x+1} - 1$ ~~de~~ cerca de $x \approx 0$, podemos ~~con~~ evaluar la función $\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$.

Ahora, ¿dónde está la fuente de problemas? es ~~por~~ la aritmética del punto flotante? En el fondo la respuesta es no como veremos a continuación.

Si queremos restar $x(1+\varepsilon_x) - y(1+\varepsilon_y) = x - y + x\varepsilon_x - y\varepsilon_y$

$$= (x-y)\left(1 + \frac{x\varepsilon_x - y\varepsilon_y}{x-y}\right)$$

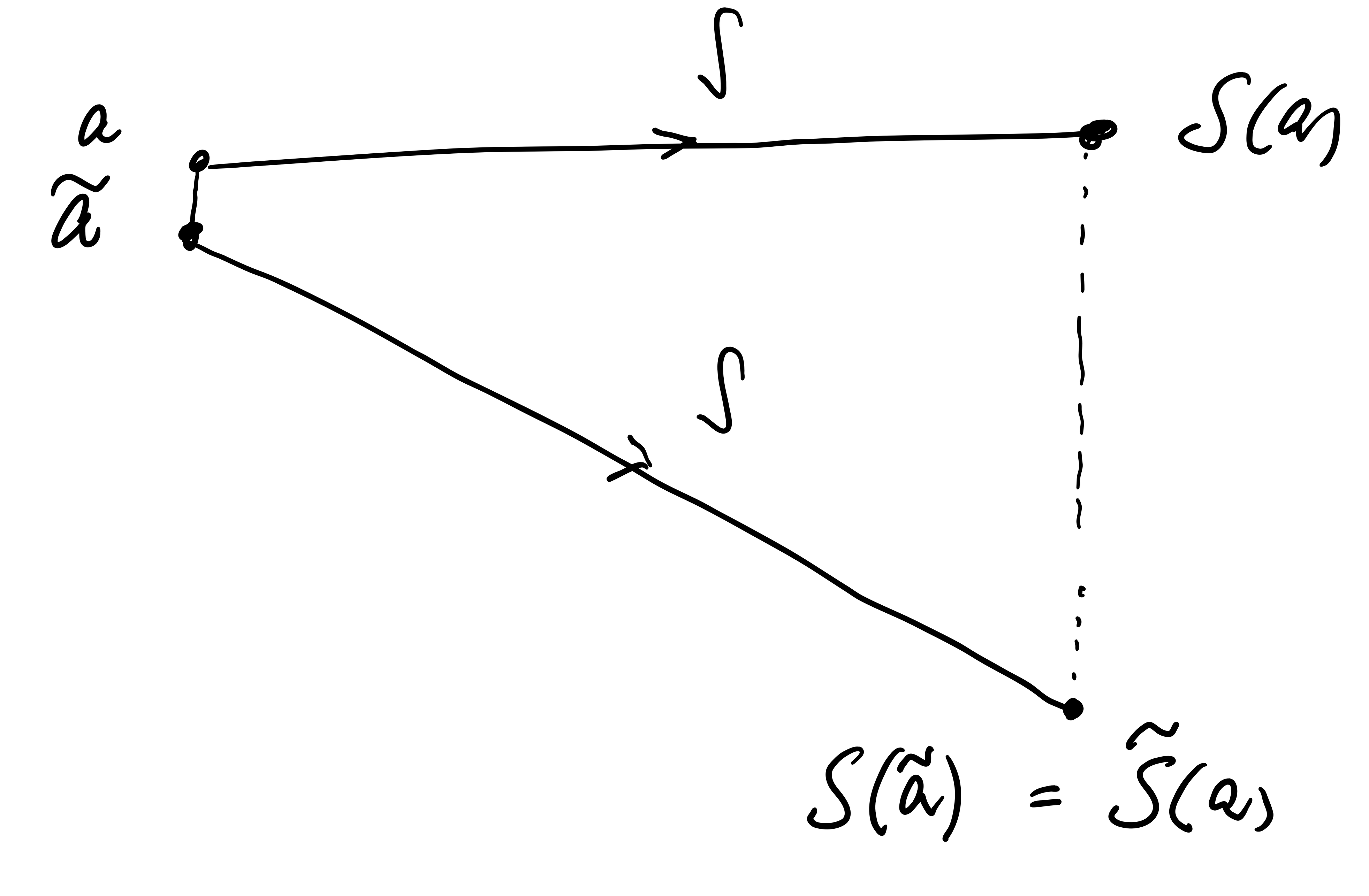
Por lo que el error de restar dos perturbaciones de x e y da un error $\varepsilon_{x-y} = \frac{x}{x-y}\varepsilon_x + \frac{y}{x-y}\varepsilon_y$.

Por lo tanto si $x \simeq y$ ε_{xy} puede ser astronómico.

Básicamente lo que estamos probando es que el mapa solución "restar" $R(a_1,a_2) = a_1 - a_2$ está mal condicionado: si $R : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\nabla R(a_1,a_2) = (1,-1)$ y por lo tanto el número de condición relativo es

$$\mu_{rel}(a_1,a_2) = \frac{\|\overbrace{\nabla R(a_1,a_2)}^{=(1,-1)}\| \cdot \|(a_1,a_2)\|}{|R(a_1,a_2)|} = \frac{2\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{|a_1-a_2|}$$

Este ejemplo de "cancelación catastrófica" nos muestra que si un algoritmo es backward-stable, el resultado es confiable si el condicionamiento es pequeño. De lo contrario puede suceder



$\tilde S$ back-st. pero S en a mal-condicionado.