Extremos relativos y puntos críticos

f función de variables (x,y)

Definición: f tiene máximo relativo en (x_0,y_0) si

$f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ para todo (x,y) cercano a (x_0,y_0)

(misma definición que en 1 variable)

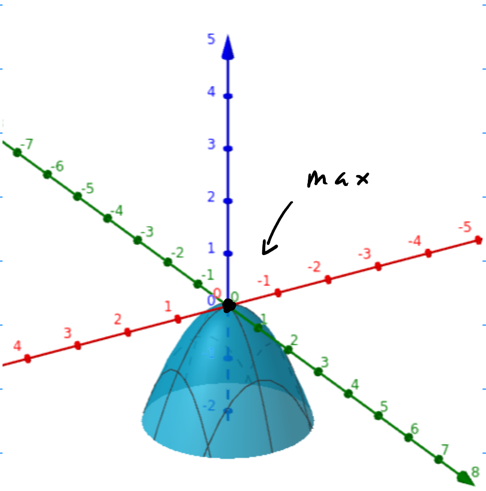
Definición: f tiene mínimo relativo en (x_0,y_0) si

$f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ para todo (x,y) cercano a (x_0,y_0)

Extremo: máximo o mínimo

Ejemplos:

① $f(x,y) = -x^2 - y^2$



f tiene máximo en $(0,0)$:

Pues $f(0,0) = 0$

y $f(x,y) = -x^2 - y^2 \leq 0$

para todo (x,y)

(máximo absoluto)

② $f(x,y) = -x^2 - y^2 + \frac{x^4}{9}$

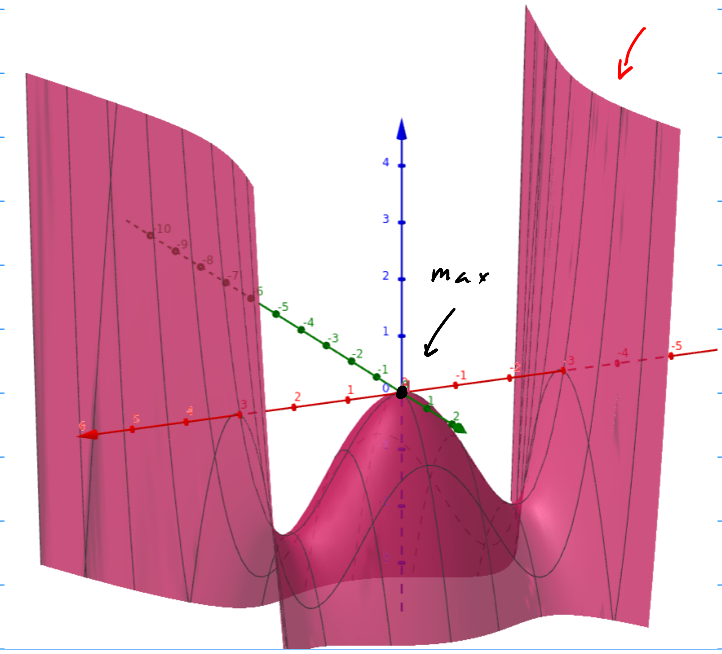
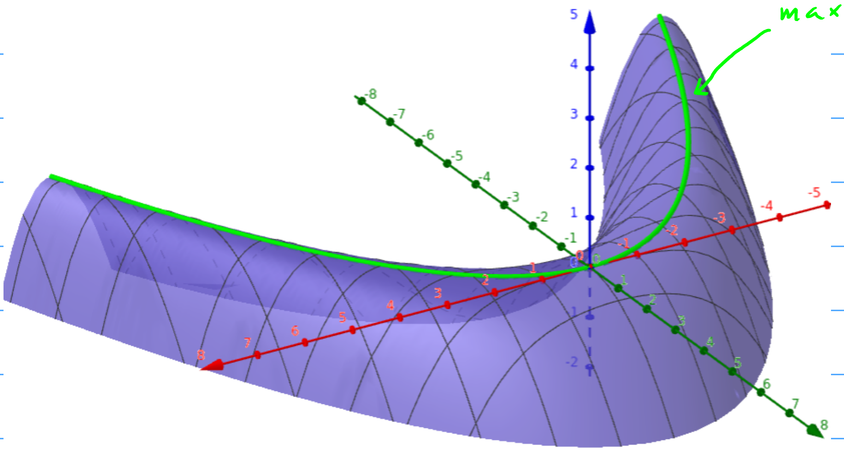


Gráfico:

f tiene máximo relativo en $(0,0)$

(no absoluto)

③ $f(x,y) = -\frac{(x^2-5y)^2}{100}$



Máximos en (x_0,y_0)

sobre la parábola

$x^2 - 5y = 0$

$(\longleftrightarrow \quad y = x^2/5)$

$f(x_0,y_0) = 0$ si

$x_0^2 - 5y_0 = 0$

y $f(x,y) \leq 0$ para todo (x,y)

(máximos absolutos)

Notar: el máximo se alcanza para varios valores de (x,y)

Supongo: f derivable, (x_0,y_0) en el interior del dominio

Prop: Si f tiene extremo relativo en (x_0,y_0), entonces

$$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$$

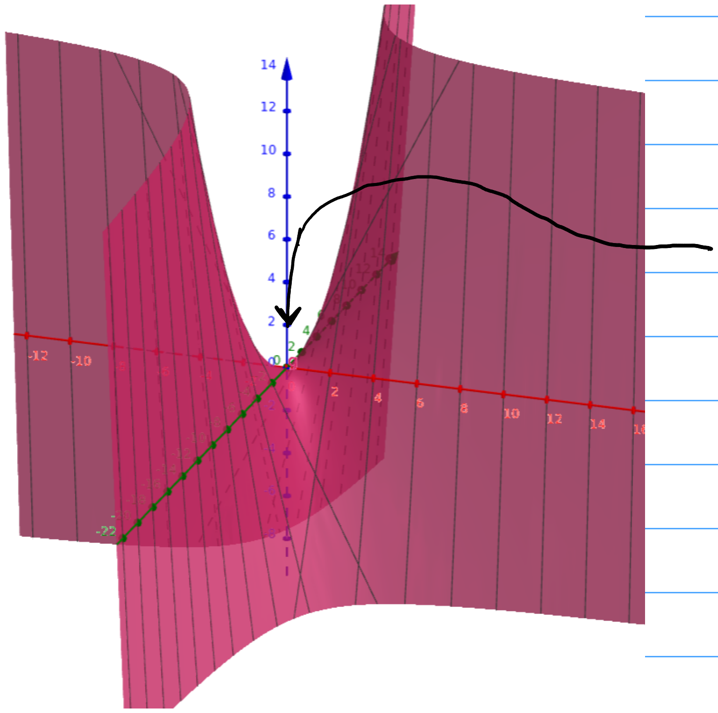
Obs: $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$

Notar: es análogo al caso de 1 variable.

También: $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = 0$ para todo v

No vale el recíproco!

Ejemplo: $f(x,y) = xy$

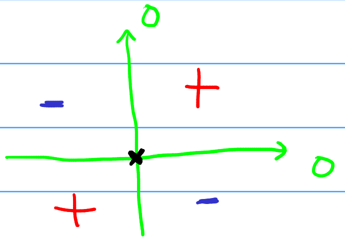


$\nabla f(x,y) = (y, x)$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$

Pero f no tiene extremo en $(0,0)$

Signo:



$f(0,0) = 0$

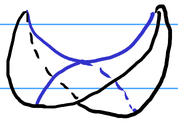
hay (x,y) cerca de $(0,0)$ con $f(x,y) > 0$ (no max)

y también con $f(x,y) < 0$ (no min).

Puntos críticos (f derivable)

Definición: (x_0, y_0) es punto crítico de f si $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$

Definición: (x_0, y_0) es punto silla de f si es punto crítico y no extremo relativo.



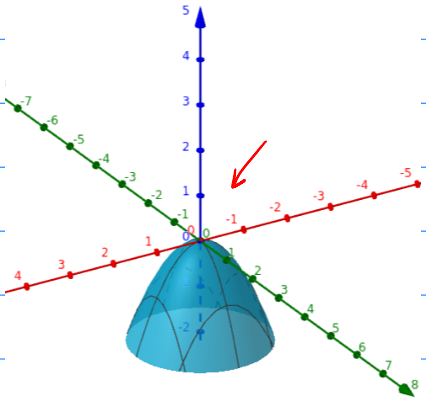
"silla de montar"

f derivable:

$$\begin{tikzcd} \text{Puntos críticos} \arrow[r] \arrow[rd] & \text{Extremos relativos (máximos o mínimos)} \\ \nabla f = (0,0) & \text{Puntos silla} \end{tikzcd}$$

Ejemplos :

① $f(x,y) = -x^2 - y^2$



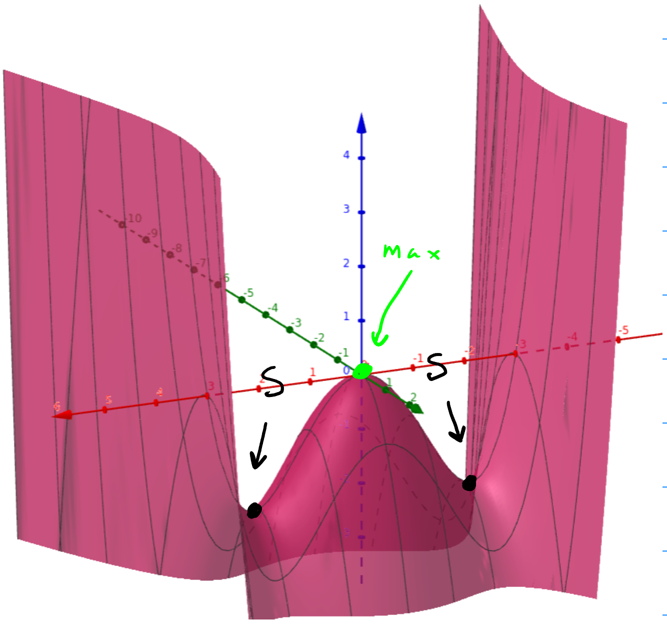
$$\nabla f(x,y) = (-2x, -2y)$$

P. críticos : $\begin{cases} -2x = 0 & \rightarrow \quad x = 0 \\ -2y = 0 & \rightarrow \quad y = 0 \end{cases}$

Pto crítico : $(0,0)$ (máximo)

② $f(x,y) = -x^2 - y^2 + \frac{x^4}{9}$

$$\nabla f(x,y) = \left(-2x + \frac{4x^3}{9} \;,\; -2y \right)$$



P. Críticos :

$$\begin{cases} -2x + \frac{4x^3}{9} = 0 & \rightarrow \quad x = 0, \quad x = 3/\sqrt{2}, \quad x = -3/\sqrt{2} \\ -2y = 0 & \rightarrow \quad y = 0 \end{cases}$$

P. Críticos :

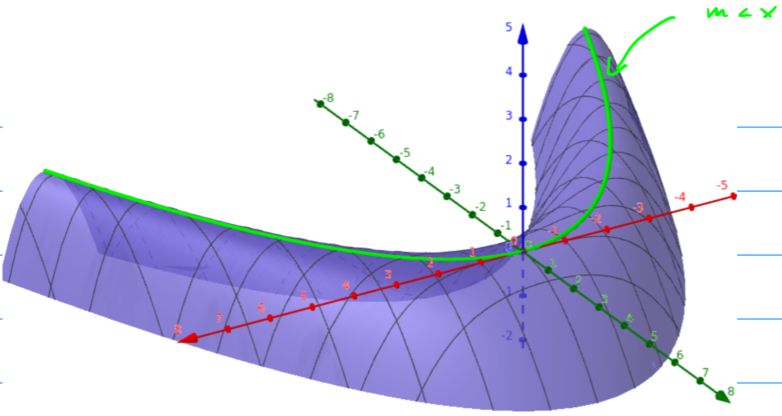
$\underline{(0,0)}$ $(3/\sqrt{2}, 0)$ $(-3/\sqrt{2}, 0)$

max

ptos. silla

(Gráfico)

③ $f(x,y) = -\dfrac{(x^2-5y)^2}{100}$

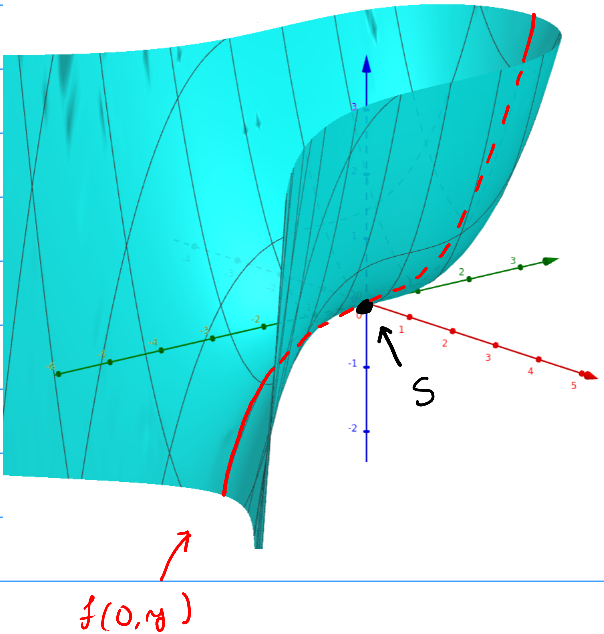


$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{x(x^2-5y)}{25} \; , \; \frac{x^2-5y}{10} \right)$$

P. Críticos: $\left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{x(x^2-5y)}{25} = 0 \\ \\ \dfrac{x^2-5y}{10} = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x\overbrace{(x^2-5y)}^{=0} = 0 \quad \text{se verifica.} \\ \\ \boxed{x^2-5y = 0} \end{array} \right.$

(x,y) punto crítico $\iff x^2-5y = 0$ (parábola, máximos)

Ejemplo : $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{9}$



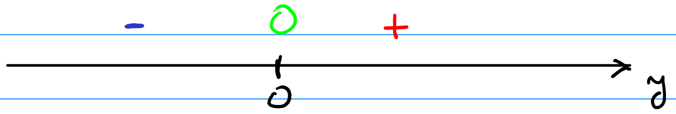
$\nabla f(x,y) = \left(2x , \frac{y^2}{3} \right)$

Punto crítico : $(0,0)$

Gráfico : silla

Otra justificación :

signo de $f(0,y) = \frac{y^3}{9}$



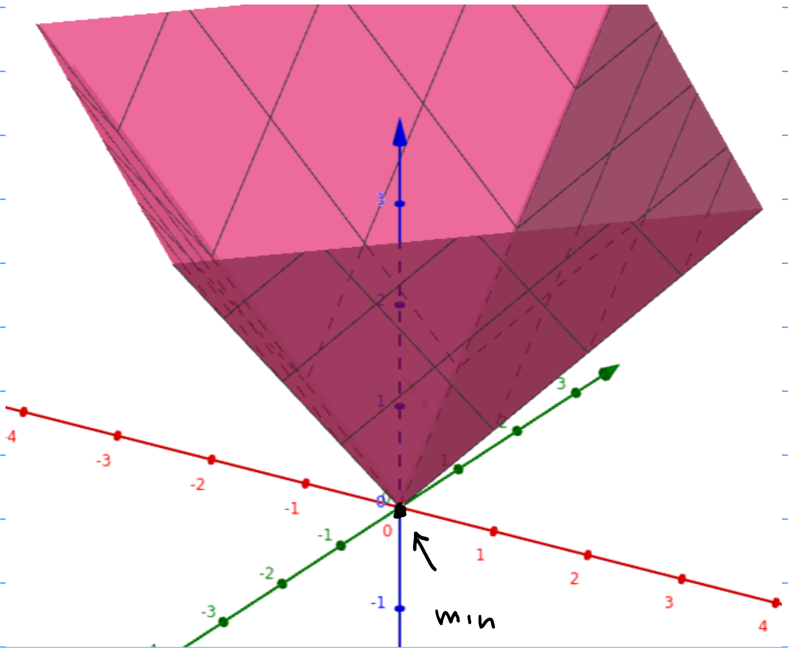
$f(0,0) = 0$ y $f(0,y) < 0$ si $y < 0$ (no min)

$f(0,y) > 0$ si $y > 0$ (no max)

En general, sin suponer f derivable:

Puede haber extremos en (x_0,y_0) donde f no es derivable.

Ejemplo: $f(x,y) = |x|+|y|$



Mínimo en $(0,0)$:

$f(0,0) = 0$ y $|x|+|y| \geq 0$

f_x no existe en $(0,y)$ para todo y

f_y no existe en $(x,0)$ para todo x

$f_x\underline{\underline{(0,0)}}$, $f_y\underline{\underline{(0,0)}}$ no existen.

Más general:

f tiene punto crítico en (x_0,y_0) si

$\to$ $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$

$\to$ Alguna derivada parcial de f no existe en (x_0,y_0)

Ejemplo: $f(x,y) = |x|+|y|$

Puntos críticos: $\{x=0\} \cup \{y=0\}$

f_x no existe

f_y no existe

$$\begin{tikzcd}
\text{Extremos} \arrow[r] & \text{P. Críticos}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{P. Criticos} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{extremos} \\
 & \text{sillas}
\end{tikzcd}$$