Clasificación de puntos críticos

f función derivable de variables (x,y)

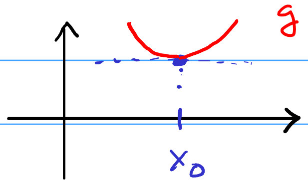
(x_0, y_0) punto crítico de f : $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$

Queremos : ver si f tiene máximo / mínimo / pt. silla en (x_0, y_0).

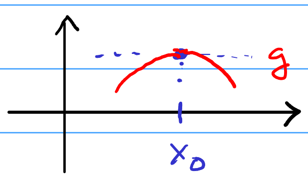
Criterio : "derivada segunda" (Hessiana)

Recordar : g de una variable , $g'(x_0) = 0$

(x_0 pto. crítico de g)



$g''(x_0) > 0 \longrightarrow$ mínimo



$g''(x_0) < 0 \longrightarrow$ máximo

$g''(x_0) = 0$ No clasifica

Criterio de la Hessiana en 2 variables

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$ simétrica → diagonalizable

(Si f tiene derivadas 2das continuas)

Criterio: Si (x_0, y_0) es punto crítico de f, y

$Hf(x_0, y_0)$ tiene valores propios λ_1, λ_2

tenemos:

1) Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ → mínimo
2) Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ → máximo

$\lambda_1 \lambda_2 > 0$ → extremo

3) Si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ → punto silla

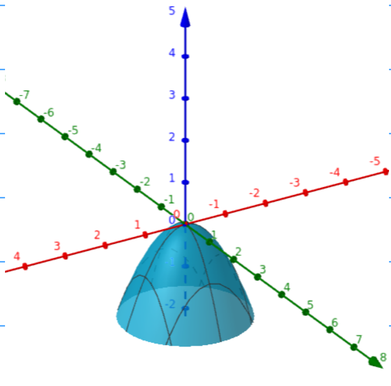
4) Si $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ No clasifica

Ejemplos:

① $f(x,y) = -x^2 - y^2$

$\nabla f(x,y) = (-2x, -2y)$

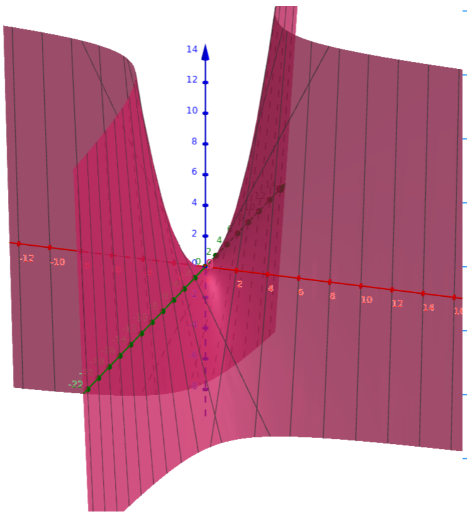
Pto. crítico: $(0,0)$



$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = Hf(0,0)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -2 < 0 \rightarrow$ max ✓

② $f(x,y) = xy$



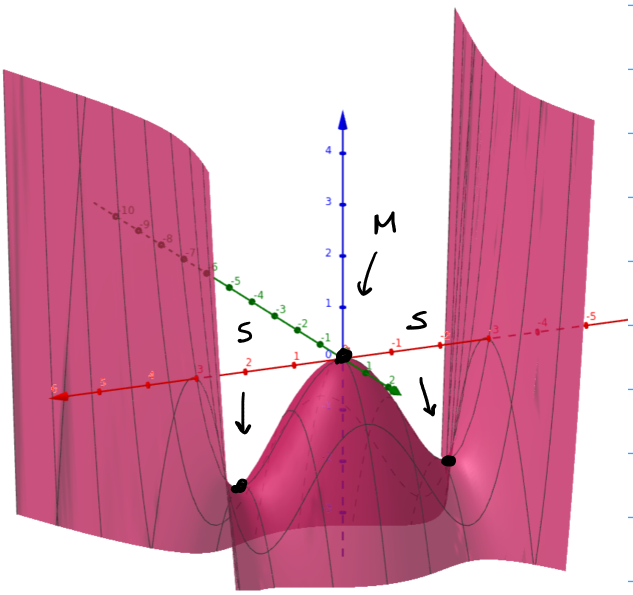
$\nabla f(x,y) = (y, x)$

Pto. crítico: $(0,0)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Hf(0,0)$$

$\chi = \lambda^2 - 1$ $\rightarrow$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ $\rightarrow$ silla ✓

③ $f(x,y) = -x^2 - y^2 + \frac{x^4}{9}$



$\nabla f(x,y) = \left(-2x + \frac{4}{9}x^3 \,,\, -2y\right)$

Ptos críticos :

$$\begin{cases} -2x + \frac{4}{9}x^3 = 0 & \begin{matrix} x = 0 \\ x = 3/\sqrt{2} \\ x = -3/\sqrt{2} \end{matrix} \\ -2y = 0 & \rightarrow \; y = 0 \end{cases}$$

Ptos críticos :		Gráfico :
	$(0,0)$	Max
	$(3/\sqrt{2}, 0)$	S.
	$(-3/\sqrt{2}, 0)$	S.

$\nabla f(x,y) = \left(-2x + \frac{4}{9}x^3 \,,\, -2y\right)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 + \frac{4}{3}x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

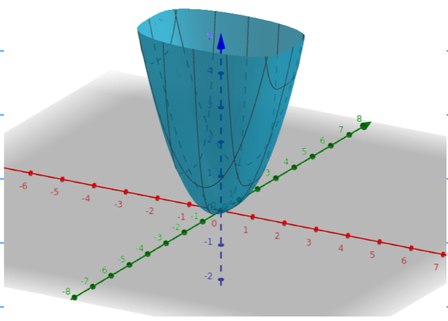
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{máximo en } (0,0)$$

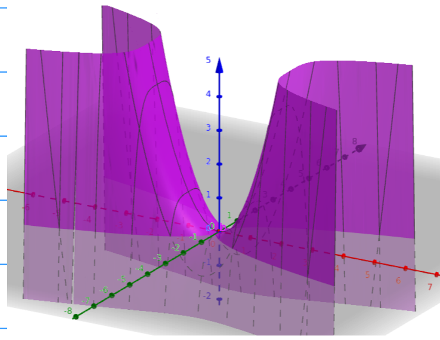
$$Hf(\pm 3/\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} -2 + \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ puntos silla en $(\pm 3/\sqrt{2}, 0)$

Si $Hf(x_0,y_0)$ tiene valor propio 0 $\rightarrow$ El criterio no clasifica.

④ $f(x,y) = x^2 + y^4$ $\qquad$ $g(x,y) = x^2 - y^4$





$\nabla f(x,y) = (2x, 4y^3)$ $\qquad$ $\nabla g(x,y) = (2x, -4y^3)$

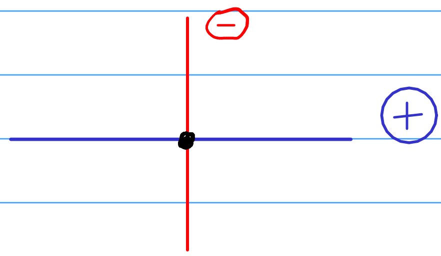
f y g tienen punto crítico en $(0,0)$

f tiene mínimo en $(0,0)$ $\qquad$ g tiene punto silla en $(0,0)$

$f(0,0) = 0$ $\qquad$ $g(0,0) = 0$

$f(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0$ $\qquad$ $g(x,0) = x^2 > 0$ si $x \neq 0$

$g(0,y) = -y^4 < 0$ si $y \neq 0$



$\nabla f(x,y) = (2x, 4y^3)$ $\qquad$ $\nabla g(x,y) = (2x, -4y^3)$

Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \qquad Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Hg(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$=$

$\lambda_1 = 2 > 0 \longrightarrow$ No máximo

$\lambda_2 = \underline{0} \longrightarrow$ No clasifica (no distingue min y silla)

En $\underline{\underline{2}}$ variables: no preciso hallar los valores propios de $Hf(x_0,y_0)$

Si (x_0,y_0) punto crítico de f, y $Hf(x_0,y_0)$ tiene valores propios λ_1 y λ_2:

$\boxed{\det Hf(x_0,y_0)} = \lambda_1\lambda_2$

- > 0 extremo
- < 0 silla
- $= 0$ no clasifica.

Si $\det Hf(x_0,y_0) > 0$ (extremo):

$\boxed{\operatorname{tr} Hf(x_0,y_0)} = \lambda_1 + \lambda_2$

- > 0 mínimo
- < 0 máximo

Ejemplo: $f(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^3}{3}$

$$\nabla f(x,y) = (x - y, -x + y^2)$$

P. Críticos: $\begin{cases} x - y = 0 \rightarrow y = x \\ -x + y^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow -x + x^2 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 1$

P. Críticos: $\boxed{(0,0),\quad(1,1)}$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2y \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det Hf(0,0) = -1 < 0$

$\boxed{\text{Silla en } (0,0)}$

$\det Hf(1,1) = 1 > 0$

$\text{tr}\, Hf(1,1) = 3 > 0$

$\boxed{\text{Mínimo en } (1,1)}$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^3}{3}$$