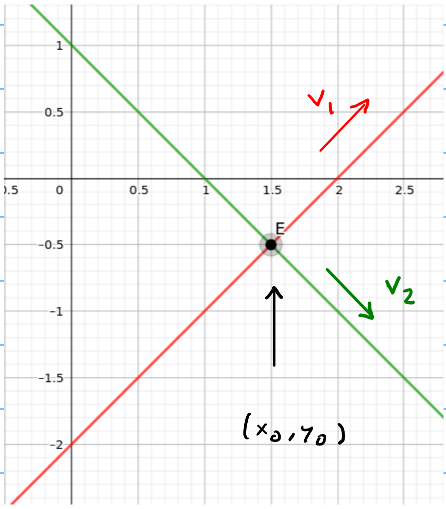
Clasificación de puntos críticos (Parte 2)

Interpretación geométrica del Criterio de la Hessiana

f función de variables (x,y) con derivadas 2^{das} continuas

(x_0,y_0) punto crítico de f

$$Hf(x_0,y_0) = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P^{-1} \qquad \text{con} \qquad P = \left(v_1 \,\middle|\, v_2\right)$$



$(x_0,y_0)+tv_1$

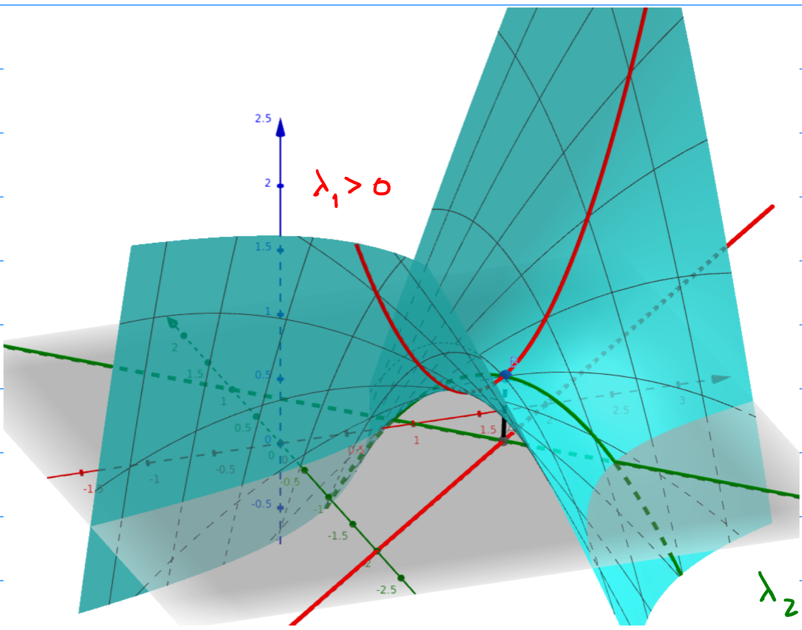
$$g(t) = f((x_0,y_0)+t\,v_1)$$

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial v_1}(x_0,y_0) = 0 \qquad (\text{pto. crítico})$$

$$g''(0) = \frac{\partial}{\partial v_1}\frac{\partial f}{\partial v_1}(x_0,y_0) = \lambda_1 \frac{\|v_1\|^2}{2}$$

$\downarrow$

tiene el signo de λ_1



$\lambda_2 < 0$

$\lambda_1 > 0$: $\underline{\text{min}}$ en dirección v_1

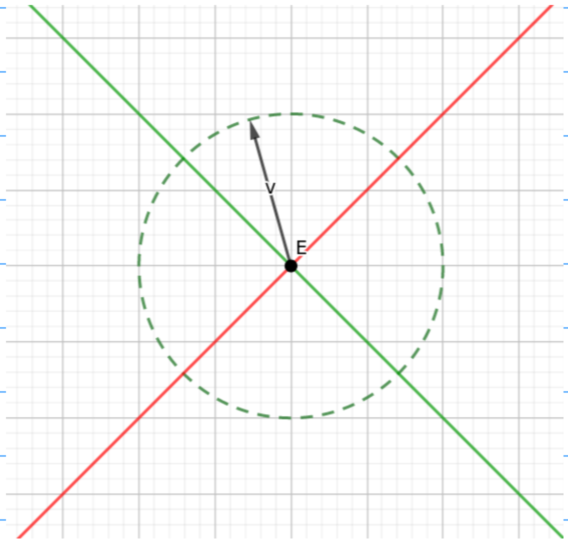
$\lambda_1 < 0$: $\underline{\text{max}}$ en dirección v_1

Para λ_2 : lo mismo en dirección v_2

Notar: Si $\lambda_1 \lambda_2 < 0 \rightarrow$ Silla

Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \to$ mínimo

$\lambda_1, \lambda_2 < 0 \to$ máximo



Si $\|v\|$ es constante:

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v} f(x_0, y_0)$$

tiene max / min si v paralelo a v_1 / v_2

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v} f(x_0, y_0) \text{ entre } \lambda_1 \frac{\|v\|^2}{2} \text{ y } \lambda_2 \frac{\|v\|^2}{2}$$

Si son ambos > 0

todas son > 0. $\Longleftarrow$

↳ min en todas las direcciones

$\lambda_1, \lambda_2 < 0 \to$ máximo : es igual

Notar : Si $\lambda_1 > 0 \to$ No hay máximo

(o $\lambda_2 > 0$) (hay min estricto en una dirección)

Si $\lambda_1 < 0 \to$ No hay mínimo

(o $\lambda_2 < 0$) (hay max estricto en una dirección)

Criterio de la Hessiana en 3 o más variables

f función de variables $(x_1, \dots, x_n)$ (n variables)

con derivadas 2^{das} continuas

$p = (p_1, \dots, p_n)$ punto crítico de f.

$Hf(p)$ tiene valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Entonces:

1) a) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 \rightarrow f$ tiene mínimo en p

b) Si algún $\lambda_i > 0 \rightarrow f$ NO tiene máximo en p.

2) a) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0 \rightarrow f$ tiene máximo en p

b) Si algún $\lambda_i < 0 \rightarrow f$ NO tiene mínimo en p

Consecuencias:

1) Si hay $\lambda_i < 0 < \lambda_j \rightarrow f$ tiene punto silla en p

2) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ y alguno $= 0$
o si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0$ y alguno $= 0$ } No clasifica

Notar: Para $n \geq 3$, no alcanza con conocer $\det Hf(p)$ y $\operatorname{tr} Hf(p)$.

Ejemplo: $f(x,y,z) = \left(x^4 - \frac{x^2}{2}\right) e^{-y^2} + 3z^3 - z$

Hallar y clasificar sus puntos críticos:

$$\nabla f(x,y,z) = \left((4x^3 - x)\, e^{-y^2},\quad -2y\left(x^4 - \frac{x^2}{2}\right) e^{-y^2},\quad 9z^2 - 1 \right)$$

P. Críticos: $\begin{cases} 4x^3 - x = 0 & (1) \\ -2y(x^4 - x^2/2) = 0 & (2) \\ 9z^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$

(1) $\to x = 0 \longrightarrow$ (2) ✓ y libre

$\to x = 1/2$, $\to x = -1/2 \;\to$ (2) $\to y = 0$

(3) $\to z = 1/3$, $z = -1/3$

Puntos críticos:

$(0, y, 1/3)$, $(0, y, -1/3)$ ambos con y libre.

$(1/2, 0, 1/3)$, $(1/2, 0, -1/3)$

$(-1/2, 0, 1/3)$, $(-1/2, 0, -1/3)$

—

$$\nabla f(x,y,z) = \left((4x^3 - x)\, e^{-y^2},\quad -2y\left(x^4 - \frac{x^2}{2}\right) e^{-y^2},\quad 9z^2 - 1 \right)$$

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} (12x^2-1)\, e^{-y^2} & -2y\,(4x^3-x)\, e^{-y^2} & 0 \\ -2y\,(4x^3-x)\, e^{-y^2} & -2\left(x^4-\frac{x^2}{2}\right)(1-2y^2)\, e^{-y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 18z \end{pmatrix}$$

Clasifico $(1/2, 0, 1/3)$, $(1/2, 0, -1/3)$, $(-1/2, 0, 1/3)$, $(-1/2, 0, -1/3)$:

$$Hf(\pm 1/2, 0, \pm 1/3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1/8, \quad \lambda_3 = \pm 6$$

Criterio: $(\pm 1/2, 0, 1/3)$ mínimos

$(\pm 1/2, 0, -1/3)$ sillas

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} (12x^2-1)e^{-y^2} & -2y(4x^3-x)e^{-y^2} & 0 \\ -2y(4x^3-x)e^{-y^2} & -2\left(x^4-\frac{x^2}{2}\right)(1-2y^2)e^{-y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 18z \end{pmatrix}$$

Clasifico $(0, y, 1/3)$, $(0, y, -1/3)$ con $y \in \mathbb{R}$:

$$Hf(0, y, \pm 1/3) = \begin{pmatrix} -e^{-y^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -e^{-y^2} < 0 \quad , \quad \lambda_2 = 0 \quad , \quad \lambda_3 = \pm 6$$

Criterio : $(0, y, 1/3)$ Sillas $(\lambda_1 < 0 < \lambda_3)$

$(0, y, -1/3)$ No clasifica

Busco otra forma de clasificar los puntos críticos

$(0, y, -1/3)$ con $y \in \mathbb{R}$

de la función $f(x,y,z) = \left(x^4 - \frac{x^2}{2}\right) e^{-y^2} + 3z^3 - z$

1) $f(0, y, -1/3) = 0 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

2) $g(z) = 3z^3 - z \longrightarrow g''(z) = 18z \longrightarrow g''(-1/3) = -6 < 0$

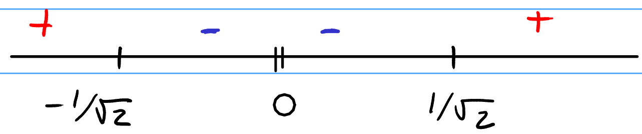
$\longrightarrow$ g tiene máximo en $-1/3$

$\longrightarrow$ Si z cerca de $-1/3$ tengo

$g(z) \leq g(-1/3)$

$\boxed{\text{Si } z \text{ cerca de } -1/3 \text{ tengo } 3z^3 - z \leq 2/9}$

3) Signo de $x^4 - \frac{x^2}{2}$:



$\boxed{\text{Si } x \text{ cerca de } 0, \text{ tengo } x^4 - \frac{x^2}{2} \leq 0}$

4) Si (x, y, z) cumple : x cerca de 0 , z cerca de $-1/3$

osea : (x,y,z) cerca de un punto de la forma $(0, y_0, -1/3)$

para algún $y_0 \in \mathbb{R}$

Tengo:

$$f(x,y,z) = \overbrace{\overbrace{\left(x^4 - \frac{x^2}{z}\right)}^{0\,\geq}\overbrace{e^{-y^2}}^{0\,<}}^{0\,\geq} + \overbrace{3z^3 - z}^{2/9\,\geq} \leq 2/9 = f(0, y_0, -1/3)$$

$\longrightarrow$ $\boxed{f \text{ tiene } \underline{\text{máximos}} \text{ en } (0, y, -1/3),\ y \in \mathbb{R}}$