Extremos condicionados

f función de variables (x, y)

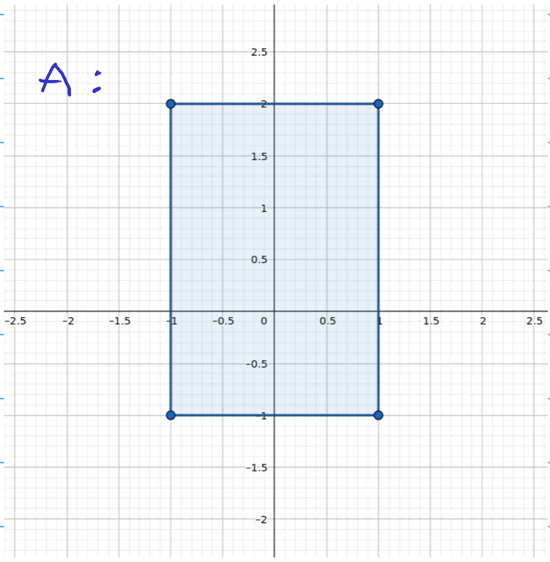
$A \subseteq$ Dominio de f

Queremos: Hallar el máximo y el mínimo de $f(x,y)$ para $(x,y) \in A$

(max. y min. absolutos de f en el conjunto A)

Ejemplo: Hallar max. y min. de

$$f(x,y) = x^2 - y \quad \text{en} \quad A = \underbrace{[-1,1]}_{-1 \leq x \leq 1} \times \underbrace{[-1,2]}_{-1 \leq y \leq 2}$$



Obs: f no tiene max ni mínimo en $\mathbb{R}^2$

$$f(0,y) = -y \xrightarrow[y \to \pm\infty]{} \mp \infty$$

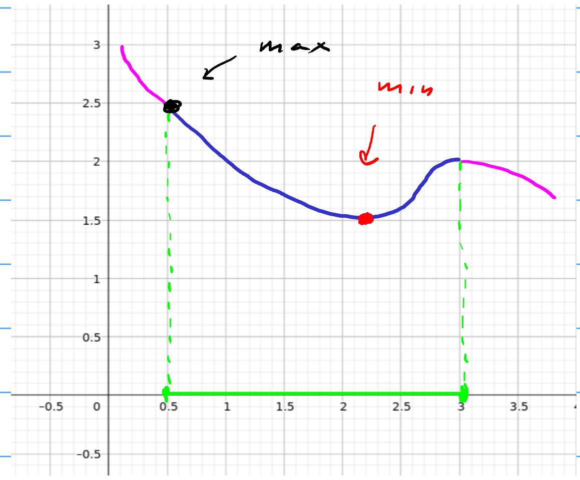
Consideraciones generales :

Teorema (Weierstrass en 2 variables)

rectángulo cerrado

Si f es continua y $A = [a,b] \times [c,d] \subseteq$ Dominio de f

$\Rightarrow$ f tiene máximo y mínimo en A.



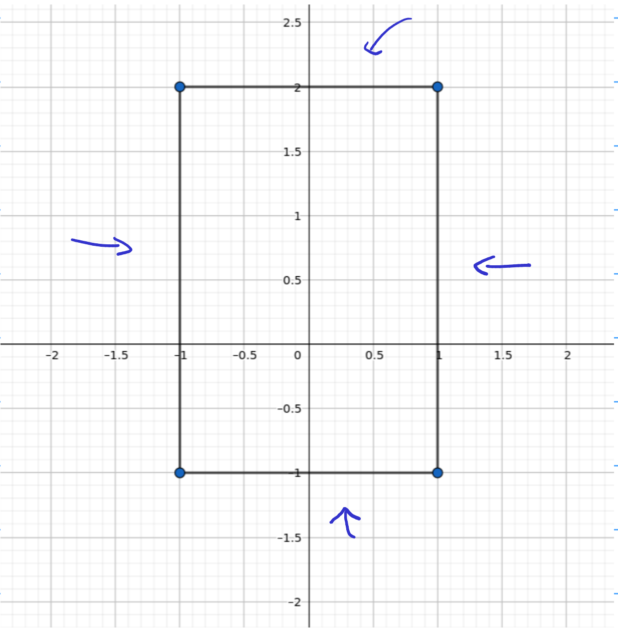
Si hay max/min en :

Interior de A :

es en un punto crítico de f

Borde de A :

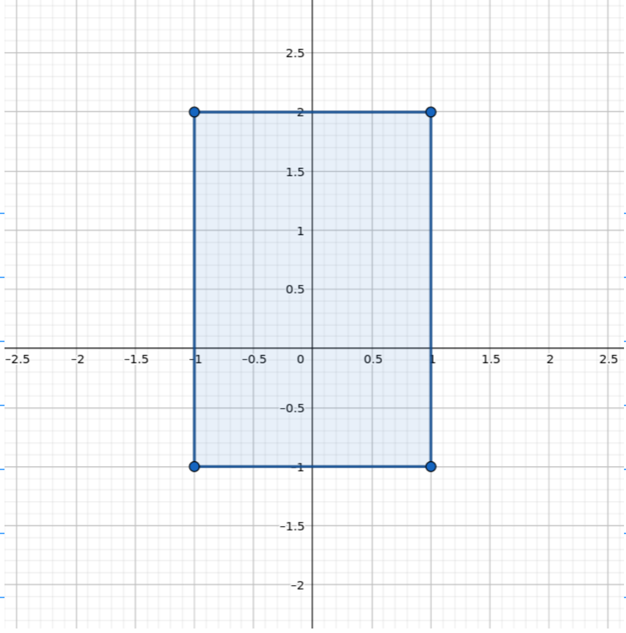
no tiene por qué ser en un punto crítico



Ejemplo :

$f(x,y) = x^2 - y$

$A = [-1,1] \times [-1,2]$



Teo $\rightarrow$ hay max y min

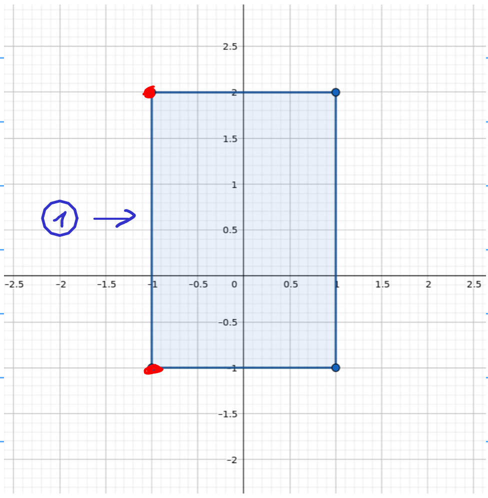
(de f en A)

Interior : hallar los puntos críticos

$\nabla f(x,y) = (2x, \underline{-1})$ $\quad -1 \neq 0 \rightarrow$ No hay

Borde :

lado por lado :



1 : $\underline{x=-1}$, $\underline{y \in [-1,2]}$

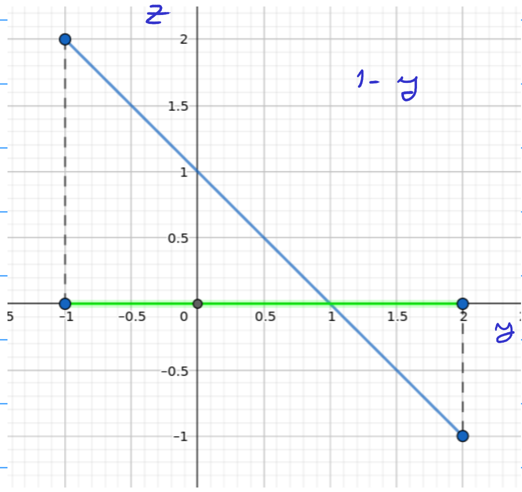
$f(x,y) = x^2 - y$ sobre el lado 1 :

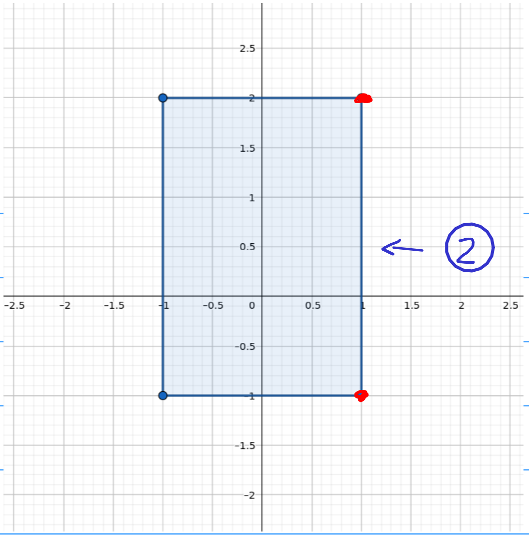
$f(-1,y) = 1 - y$, con $\underline{y \in [-1,2]}$

Max / min en lado 1 :

$f(-1,-1) = 2$

$f(-1,2) = -1$





② : $x = 1$, $y \in [-1, 2]$

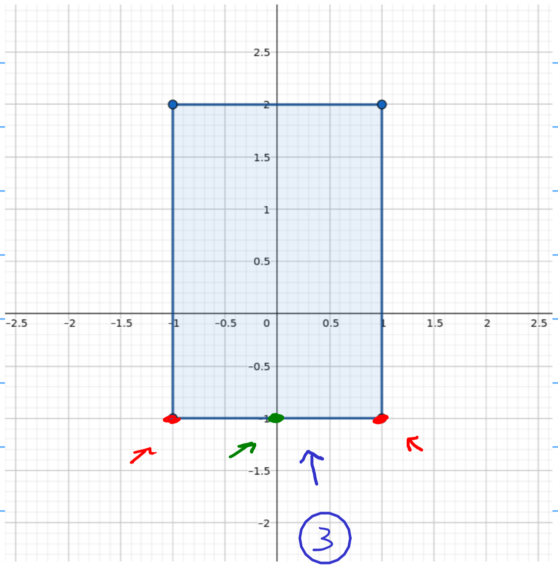
$f(x,y) = x^2 - y$

$f(1,y) = 1 - y$, $y \in [-1, 2]$

Max/min : $f(1,-1) = 2$

$f(1,2) = -1$

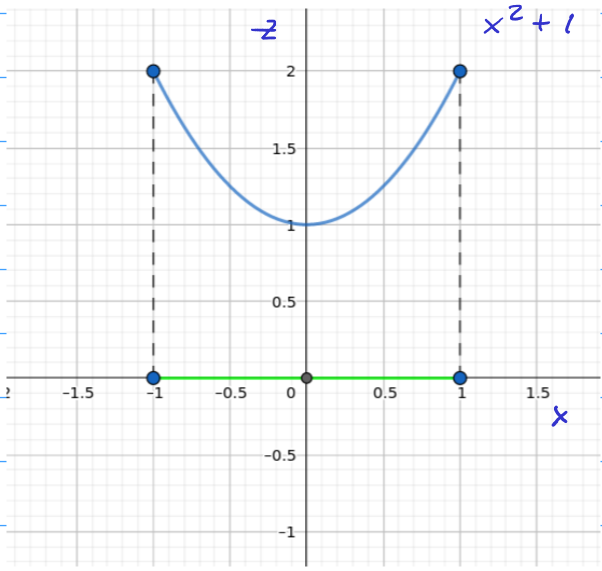
(Igual al lado ①)



③ : $y = -1$, $x \in [-1, 1]$

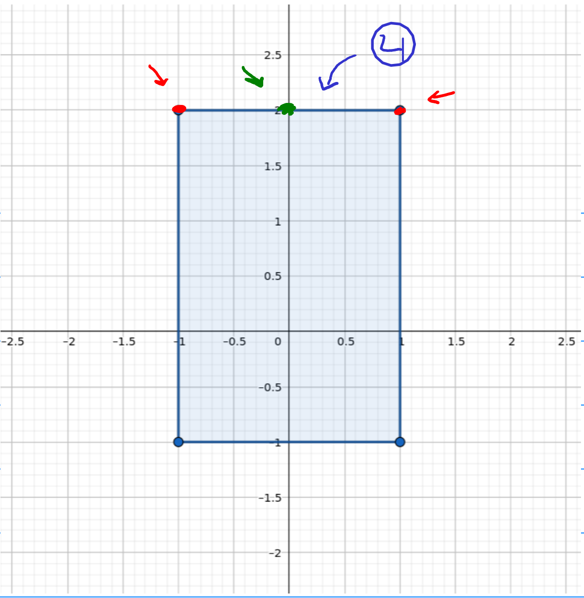
$f(x,y) = x^2 - y$

$f(x,-1) = x^2 + 1$, con $x \in [-1, 1]$



Max/min : $f(-1,-1) = f(1,-1) = 2$

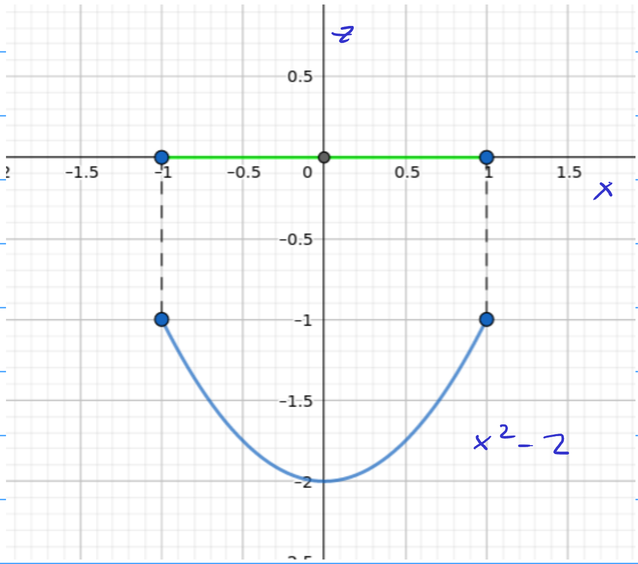
$f(0,-1) = 1$



④: $y = 2, \quad x \in [-1, 1]$

$f(x,y) = x^2 - y$

$f(x,2) = x^2 - 2$ con $x \in [-1, 1]$



Max / min : $f(-1,2) = f(1,2) = -1$ ←

$f(0,2) = -2$ ←

Resumen:

Interior : no hay criticos

Borde : → esquinas :

$f(-1,-1) = f(1,-1) = 2$ ← Max

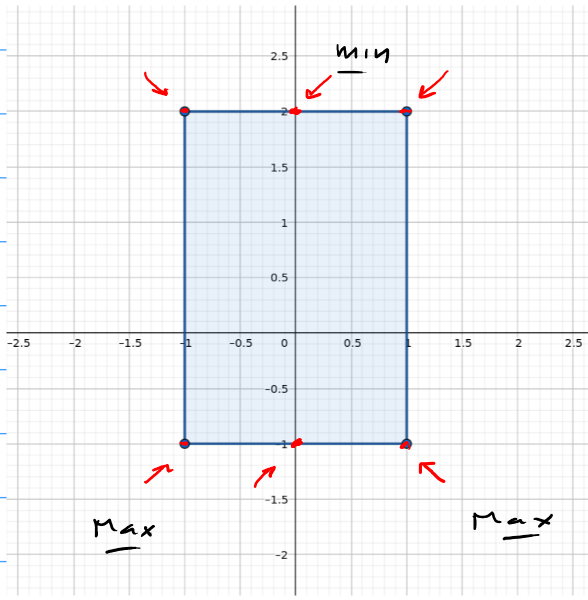
$f(-1,2) = f(1,2) = -1$

→ lado ③ :

$f(0,-1) = 1$

→ lado ④ :

$f(0,2) = -2$ ← min



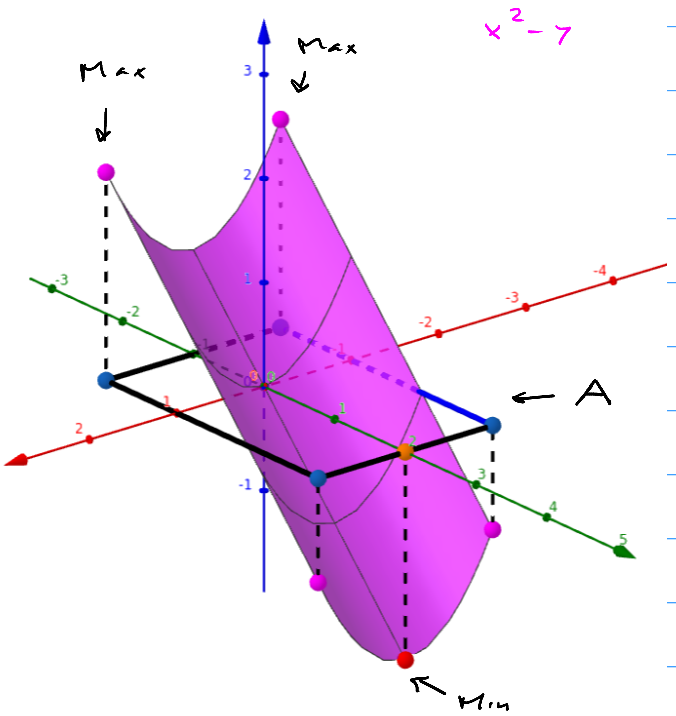
Conclusión:

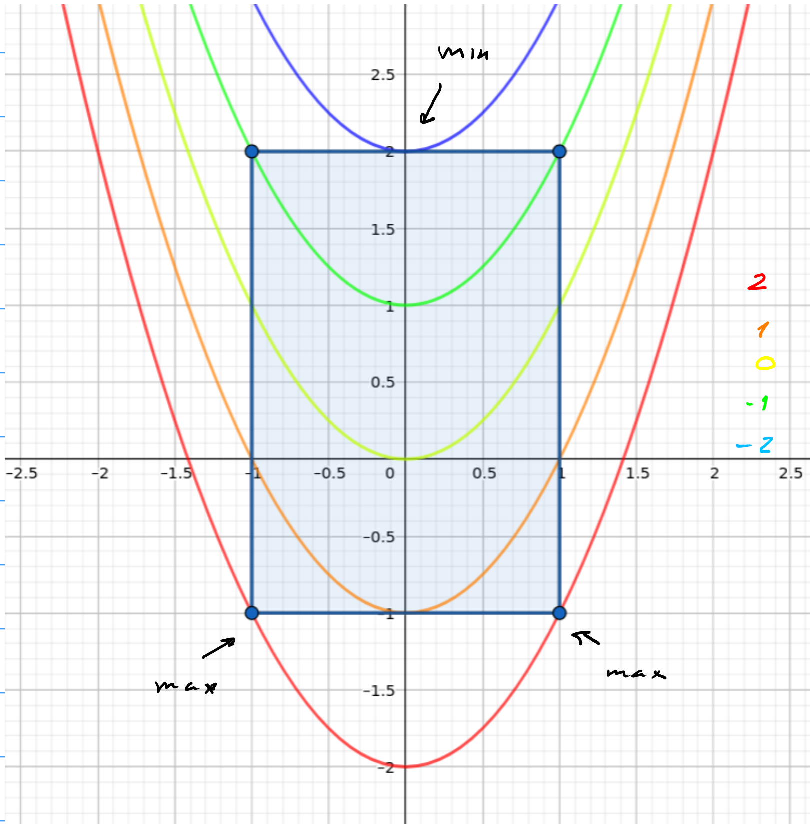
Los extremos de $f(x,y) = x^2 - y$ en $A = [-1,1] \times [-1,2]$

son:

Máximo 2 se dá en $(-1,-1)$ y $(1,-1)$

Mínimo -2 se dá en $(0,2)$





Teorema de Weierstrass (varias variables)

f continua, $A \subseteq$ Dominio de f, A cerrado y acotado

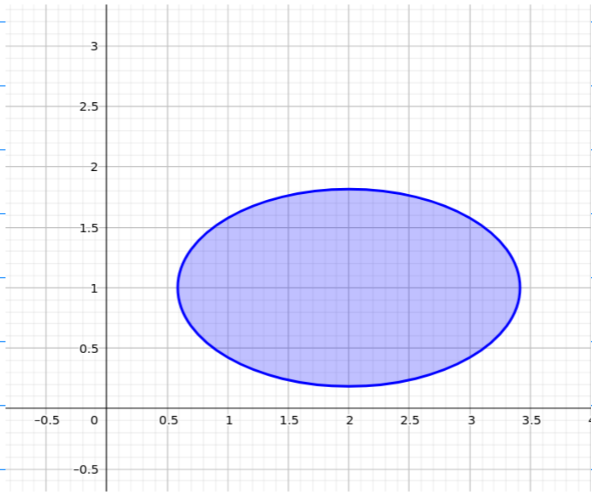
$\Rightarrow$ f tiene max. y min. en A.

cerrado: tiene a todo su borde

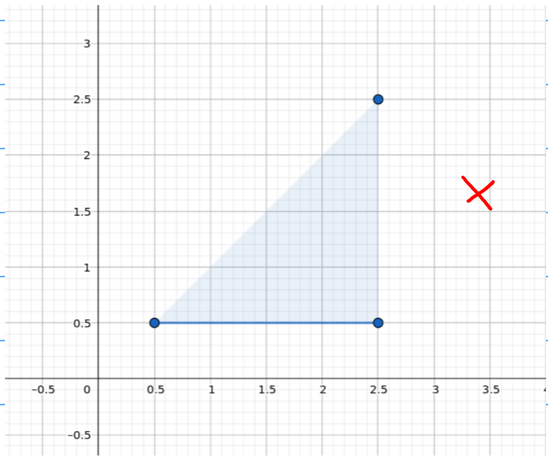
acotado: contenido en algún rectángulo

("no se va a infinito")

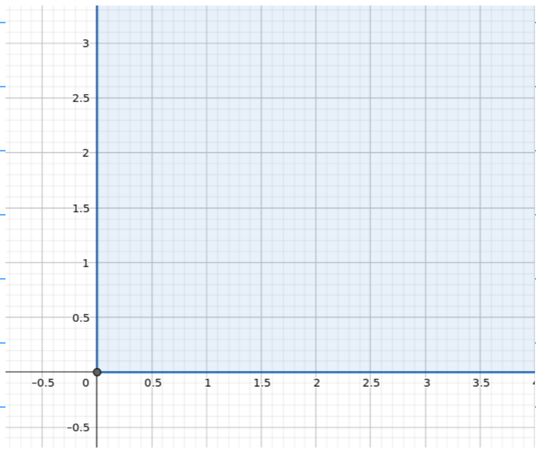
✓



✓



✗



✗

no cerrado

no acotado