Derivadas de orden superior

(derivadas segundas, terceras, etc.)

f función de variables (x, y)

Derivadas parciales : f_x , f_y son funciones de (x,y)

Derivadas segundas de f : derivadas parciales de f_x y f_y

$$f_x \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} f_x = f_{xx} \qquad f_y \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} f_y = f_{yx}$$

$$f_x \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y} f_x = f_{xy} \qquad f_y \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y} f_y = f_{yy}$$

(si estas derivadas existen) (Notación)

Ejemplo : $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^3$

$f_x(x,y) = 2x - y \longrightarrow f_{xx}(x,y) = 2$

$f_x(x,y) = 2x - y \longrightarrow f_{xy}(x,y) = -1$

$f_y(x,y) = -x + 6y^2 \longrightarrow f_{yx}(x,y) = -1$

$f_y(x,y) = -x + 6y^2 \longrightarrow f_{yy}(x,y) = 12y$

Observar : son iguales

Teorema: $f_{xy} = f_{yx}$ (si estas derivadas 2^{das} son continuas)

No importa el orden en el que hago las derivadas

Ejemplo: $f(x,y) = y^2 \log(x)$ Verifico el Teorema:

$f_x(x,y) = y^2 \cdot \frac{1}{x}$ $\rightarrow$ $f_{xy}(x,y) = 2y \cdot \frac{1}{x}$

$=$

$f_y(x,y) = 2y \log(x)$ $\rightarrow$ $f_{yx}(x,y) = 2y \cdot \frac{1}{x}$ ✓

Matriz Hessiana de f :

Organizo las derivadas segundas en una matriz 2×2

$$\begin{array}{cc} Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow x \\ \leftarrow y \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{array} & \end{array}$$

$\uparrow$ notación

Aclaración: Matriz de funciones, para cada valor de (x,y), obtengo una matriz $Hf(x,y)$

Ejemplo 1 : $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^3$

Recordar :

$f_{xx}(x,y) = 2$

$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = -1$

$f_{yy}(x,y) = 12y$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 12y \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2 : $f(x,y) = y^2 \log(x)$

Recordar:

$f_x(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$ $\longrightarrow$ Calculo : $f_{xx}(x,y) = -\dfrac{y^2}{x^2}$

$f_y(x,y) = 2y \log(x)$ $\longrightarrow$ $f_{yy}(x,y) = 2 \log(x)$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{2y}{x}$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2/x^2 & 2y/x \\ 2y/x & 2\log(x) \end{pmatrix}$$

Nota: Teorema $\longrightarrow$ $Hf(x,y)$ matriz simétrica

$f_{xy} = f_{yx}$

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & \underline{\underline{f_{xy}}} \\ \underline{\underline{f_{yx}}} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

($\to$ $Hf(x,y)$ diagonalizable)

Aplicaciones de las derivadas segundas:

① Aproximación de orden 2 entorno a un punto (x_0, y_0):

Conociendo el valor en (x_0, y_0) de f y sus derivadas, puedo aproximar $f(x, y)$ para (x, y) cerca de (x_0, y_0)

Orden 1: (derivadas primeras)   Si v, w son chicos

$$f(\underbrace{x_0 + v}_{x}, \underbrace{y_0 + w}_{y}) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\, v + f_y(x_0, y_0)\, w$$

Orden 2: Mejoro esa aproximación usando las derivadas 2^{das}

$$f(x_0 + v, y_0 + w) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\, v + f_y(x_0, y_0)\, w +$$
$$+ f_{xx}(x_0, y_0)\frac{v^2}{2} + f_{xy}(x_0, y_0)\, vw + f_{yy}(x_0, y_0)\frac{w^2}{2}$$

② Encontrar máximos y mínimos relativos

(detalles: después)

Derivadas de orden mayor:

Derivadas $3^{\underline{ras}}$: derivadas parciales de f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}

Teorema $\to$ $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ (2 veces x, 1 vez y)

$\searrow$ $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ (2 veces y, 1 vez x)

Sucesivamente: derivadas $4^{\underline{tas}}$, etc

(Todo si las derivadas correspondientes existen)

Aplicación 1: Mejorar aún más la aproximación.

Derivadas $2^{\underline{das}}$ en 3 variables:

f función de (x, y, z)

Derivadas $1^{\underline{ras}}$: Derivadas $2^{\underline{as}}$:

$f_x \longrightarrow f_{xx}, \; f_{xy}, \; f_{xz}$

$f_y \longrightarrow f_{yx}, \; f_{yy}, \; f_{yz}$

$f_z \longrightarrow f_{zx}, \; f_{zy}, \; f_{zz}$

Teorema $\rightarrow$ $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xz} = f_{zx}$, $f_{yz} = f_{zy}$

Matriz Hessiana: tamaño 3×3

$$Hf = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow z \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} & \end{array}$$

Es simétrica

Ejemplo: $\quad f(x,y,z) = y z^3 - \log(x)$

$f_x(x,y,z) = -\frac{1}{x}$ $\qquad f_y(x,y,z) = z^3$ $\qquad f_z(x,y,z) = 3yz^2$

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1/x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2 \\ 0 & 3z^2 & 6yz \end{pmatrix}$$

Derivadas 2^{das} en n variables:

f de variables $(x_1, \dots, x_n)$

Hessiana: tamaño $n \times n$

Entrada (i,j) : $\dfrac{\partial}{\partial x_j} \dfrac{\partial}{\partial x_i} f$

Teorema $\longrightarrow$ Hf simétrica

(si las derivadas 2^{das} son continuas)

En general: puedo considerar derivadas de orden $K \geq 1$ de funciones de n variables

(derivando sucesivamente)