**Universidad de la República**
**Facultad de Ciencias**
**Centro de Matemática**

**Teoría de Representaciones**
**Año 2022**

## Repartido 6: Semisimplicidad.

1. Probar que $S \subseteq R$ es una inclusión de anillos y ${}_RR$ es semisimple, no necesariamente ${}_SS$ lo es.

2. *a*) Probar que un anillo conmutativo es simple como anillo si y sólo si lo es como módulo a izquierda (a derecha) sobre sí mismo.

   *b*) Sea $D$ un dominio de integridad (i.e. un anillo conmutativo sin divisores de cero). Probar (sin usar teo de Wedderburn) que son equivalentes:

   1) $D$ es semisimple (no hace falta aclarar de qué lado),
   2) $D$ es simple (no hace falta aclarar como qué).

3. Sea $M$ un $R$-módulo semisimple. Probar que son equivalentes:

   *a*) $M$ es finitamente generado,
   *b*) $M$ es noetheriano,
   *c*) $M$ es artiniano,
   *d*) $M$ es suma directa de finitos módulo simples.

4. Sean $R$ un anillo y $x, y \in R$.

   *a*) Probar que si $xR = yR$, entonces existe un isomorfismo $f : Rx \to Ry$ de $R$-módulos a izquierda, tal que $f(x) = y$.

   *b*) Probar que si además ${}_RR$ es semisimple, entonces $xR = yR$ si y sólo si existe $u \in U(R)$ tal que $x = yu$ (Sugerencia: extender $f$ a un automorfismo de ${}_RR$).

5. Probar que el centro de un anillo simple es un cuerpo.

6. Sean $\Bbbk$ un cuerpo y $G$ un grupo finito.

   *a*) Probar (recordar el teo de Maschke) que el anillo $\Bbbk G$ es semisimple si y sólo si el orden de $G$ no divide a char$\Bbbk$.

   *b*) Supongamos $\Bbbk$ algebraicamente cerrado de característica 0. Sea $\{V_1, V_2, \cdots, V_t\}$ un conjunto completo de $\Bbbk$-representaciones irreducibles no isomorfas de $G$ de dimensión $n_i$.

   1) Probar que se tiene el siguiente isomorfismo de $G$-representaciones:

   $$\Bbbk G \cong \bigoplus_{i=1}^{t} V_i^{n_i}.$$

   2) Probar que el centro $Z(\Bbbk G)$ es isomorfo (como anillo) a $\Bbbk^t$.

   Generalizamos así resultados que habíamos obtenido para $\Bbbk = \mathbb{C}$ usando la teoría de caracteres.

7. Probar que si $R$ es semisimple, $M_n(R)$ también lo es.

8. Se consideran las afirmaciones siguientes

   - (i) $D$ es un anillo con división,
   - (ii) $D$ es simple,
   - (iii) $M_n(D)$ es simple para algún entero positivo $n$
   - (iv) $M_n(D)$ es simple para todo entero positivo $n$.

   Sabemos que $(i)$ implica $(ii), (iii)$ y $(iv)$. Investigar sobre las demás implicancias.

9. Sea $D$ un dominio (conmutativo). Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   *a*) $D$ es un anillo con división,

   *b*) $D$ es semisimple

   *c*) $D$ es simple

   *d*) $M_n(D)$ es semisimple para cierto entero positivo $n$

   *e*) $M_n(D)$ es simple para cierto entero positivo $n$.

10. Dado un grafo dirigido finito $Q$, si $\alpha$ es una flecha de $a$ a $b$ y $\beta$ es una flecha de $b$ a $c$, $\alpha\beta$ es un camino de largo 2 de $a$ a $c$. Análogamente se definen caminon de largo $n$ en $Q$ (los vértices son camino de largo 0). Si $\Bbbk$ es un cuerpo, el álgebra de caminos $\Bbbk Q$ se define como sigue:

    - Sus elementos son las combinaciones formales de caminos en $Q$ con coeficientes en $\Bbbk$.
    - La suma es la suma formal.
    - El producto se define extendiendo por linealidad la siguiente operación en caminos:

    $$c \cdot d = \begin{matrix} cd & \text{si } c \text{ termina donde empieza } d \\ 0 & \text{si no} \end{matrix}$$

    *a*) Especificar el neutro de $\Bbbk Q$.

    *b*) Sea $e$ un vértice de $Q$. Probar que el subespacio de $\Bbbk Q$ generado por los caminos que terminan en $e$ es un módulo a izquierda.

    *c*) Probar que si $Q$ no tiene aristas $\Bbbk Q$ es semisimple.

    *d*) Probar que si $Q$ tiene un vértice y una arista $\Bbbk Q$ no es semisimple.

11. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y $R = A_1(\Bbbk)$ su primera $\Bbbk$-álgebra de Weyl, esto es, la $\Bbbk$-álgebra generada por $\{x, y\}$ con relaciones $yx = xy + 1$.

    *a*) Establecer $R$ como cierto torcimiento por derivación de un álgebra de polinomios.

    *b*) Probar que $R$ es un anillo no conmutativo sin divisores de cero.

    *c*) Probar que $R$ no es artiniano a izquierda.

    *d*) Para $p$ polinomio en una variable, explicitar $yp(x)$ y $p(y)x$ como polinomios en $y$ con coeficientes en $\Bbbk[x]$.

    *e*) Supongamos que $char\Bbbk = 0$.

    1) Probar que si $I$ es un ideal bilátero que contiene a $p(x)$, entonces $p'(x) \in I$ y observar que vale un resultado análogo para $p(y)$.
    2) Probar que $R$ es simple.

    *f*) Probar que si $\Bbbk = \mathbb{Z}_p$, entonces $R$ no es simple.