**Universidad de la República**
**Facultad de Ciencias**
**Centro de Matemática**

**Álgebra Lineal II**
**Segundo semestre 2022**

## Práctico 7

En los ejercicios que siguen, si $A \in M_n(\mathbb{R})$, entonces $\operatorname{tr}(A)$ es la traza y $\det(A)$ es el determinante.

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ son formas bilineales.

   *a)* $V = \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = x + 2y$.

   *b)* $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = (x_1 + y_1)^2 + (x_1 - y_1)^2$.

   *c)* $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = (x_1 + y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2$.

   *d)* $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

   *e)* $V$ arbitrario y $\alpha, \beta \in V^*$ fijos; $\varphi$ definida por $\varphi(u, v) = \alpha(u)\,\beta(v)$, para todo $u, v \in V$.

   *f)* $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $A \in M_m(\mathbb{R})$ fija; $\varphi$ definida por $\varphi(X, Y) = \operatorname{tr}\big(X^t A Y\big)$, para todo $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$.

2. Probar que $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi((x, y, z),\, (x', y', z')) = xx' - 2xy' + yx' - zz', \quad \forall (x, y, z),\, (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$$

   es una forma bilineal. Hallar la matriz asociada en la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$.

3. Sea $\varphi \in \operatorname{Bil}_S\left(\mathbb{R}^2\right)$ cuya forma cuadrática asociada es $\Phi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$. Probar que $\varphi$ es no degenerada si y solo si $b^2 - 4ac \neq 0$.

4. Se considera $\varphi \in \operatorname{Bil}_S\big(M_2(\mathbb{R})\big)$ definida por $\varphi(X, Y) = \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(Y)$, para todo $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$. Probar que $\varphi$ es degenerada. Hallar $X_0 \neq 0$ tal que $\varphi(X_0, Y) = 0$, para todo $Y \in M_2(\mathbb{R})$.

5. Se define $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mediante $\varphi(X, Y) = \operatorname{tr}(XY)$, para todo $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$.

   *a)* Probar que $\varphi$ es una forma bilineal simétrica.

   *b)* Probar que $\varphi$ es no degenerada.

   *c)* Sea $W = \{A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R}) :\ a_{12} = 0\}$. Probar que la restricción de $\varphi$ a $W$ es degenerada.

6. Para cada una de las siguientes matrices $A$, hallar una matriz diagonal $D$ y una matriz invertible $Q$ tales que $D = Q^t A Q$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. En cada uno de los casos siguientes encontrar una base $\varphi$-ortogonal $\mathcal{B}$ y hallar $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

   *a)* $\varphi \in \operatorname{Bil}_S\left(\mathbb{R}^2\right)$, tal que $\Phi(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   *b)* $\varphi \in \operatorname{Bil}_S\left(\mathbb{R}^2\right)$, tal que $\Phi(x, y) = 2xy$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   *c)* $\varphi = \beta_A \in \operatorname{Bil}_S\left(\mathbb{R}^3\right)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   *d)* $\varphi \in \operatorname{Bil}_S\left(\mathbb{R}^3\right)$, tal que $\Phi(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 6yz$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

8. Sea $\Phi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(X) = \det(X)$, para todo $X \in M_2(\mathbb{R})$.

   *a*) Probar que $\Phi$ es una forma cuadrática en $M_2(\mathbb{R})$.

   *b*) Encontrar una base $\varphi$-ortogonal $\mathcal{B}$ de $M_2(\mathbb{R})$ y hallar $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

9. Se consideran las siguientes formas cuadráticas $\Phi$ en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, pensados estos como espacios con producto interno con el producto escalar. Sea $\varphi$ la forma bilineal simétrica asociada a $\Phi$. Hallar una base ortonormal $\mathcal{B}$ tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ sea diagonal.

   *a*) $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x, y) = 2xy$.

   *b*) $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x, y) = 7x^2 - 8xy + y^2$.

   *c*) $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \Phi(x, y, z) = 3x^2 - 2xz + 3y^2 + 3z^2$.

10. En el ejercicio 6, para cada matriz $A$ consideramos la forma cuadrática $\Phi$ definida por $\Phi(v) = v^t Av$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$. Para cada una de las formas cuadráticas de los ejercicios 6, 7 y 9, se pide:

    *a*) Hallar la signatura y el rango.

    *b*) Clasificar la forma cuadrática (en definida postiva, negativa, etc.) y determinar si degenera.

11. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrices simétricas tales que $B$ es invertible y todos sus valores propios tienen el mismo signo. Probar que existe una matriz invertible $Q \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $Q^t A\, Q$ y $Q^t B\, Q$ son matrices diagonales. *Sugerencia:* considerar primero el caso en que $B$ tiene todos sus valores propios positivos y por lo tanto $\langle u, v\rangle = u^t Bv$ define un producto interno en $\mathbb{R}^n$.

12. Sea $V$ un espacio de dimensión finita y $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$ una forma no degenerada.

    *a*) Probar que si $u, v \in V$ son tales que $\varphi(u, w) = \varphi(v, w)$, para todo $w \in V$, entonces $u = w$.

    *b*) Sea $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base $\varphi$-ortogonal de $V$.

       1) Probar $\Phi(e_i) \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

       2) Probar $v = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(v,e_i)}{\Phi(e_i)} e_i$, para todo $v \in V$.

       3) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que existe un único $T^\bullet \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\varphi\big(T(u), v\big) = \varphi\big(u, T^\bullet(v)\big)$, $\forall u, v \in V$.

    *c*) Probar que la correspondencia $T \mapsto T^\bullet$ definida en el ítem anterior verifica

    $$(aT + S)^\bullet = aT^\bullet + S^\bullet, \quad (TS)^\bullet = S^\bullet T^\bullet, \quad (T^\bullet)^\bullet = T, \quad \forall\, T, S \in \mathcal{L}(V),\ a \in \mathbb{R}.$$

    Estas fórmulas generalizan las propiedades de los adjuntos en espacios con producto interno.

13. Consideramos la forma cuadrática $\Phi$ en $\mathbb{R}^4$ definida por $\Phi(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. Sea $\varphi$ la forma bilineal simétrica asociada.

    *a*) Probar que $\Phi$ es no degenerada.

    *b*) Sea $\nu \in \mathbb{R}$ tal que $|\nu| < 1$. Definimos $T_\nu \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ mediante

    $$T_\nu(x, y, z, t) = \left(\frac{x - \nu t}{\sqrt{1 - \nu^2}},\ y,\ z,\ \frac{t - \nu x}{\sqrt{1 - \nu^2}}\right), \quad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

       1) Probar $\Phi\big(T_\nu(v)\big) = \Phi(v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^4$. Deducir $\varphi\big(T_\nu(u), T_\nu(v)\big) = \varphi(u, v)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^4$.

       2) Probar que $T_\nu$ es invertible y vale $(T_\nu)^\bullet = (T_\nu)^{-1} = T_{-\nu}$.

    **Nota.** Esta forma cuadrática aparece en el estudio de la teoría especial de la relatividad. El mapa $T_\nu$ representa el cambio de coordenadas respecto a un sistema inercial que se mueve a velocidad $\nu$ (que está medida en relación a la velocidad de la luz).