Eliminación Gaussiana

ALN 2022
Clase 17
1 Nov

Es el método más conocido para resolver sistemas lin.
El proceso de E-G tiene por finalidad transformar el sistema en uno triangular. Veamos un ejemplo:

Supongamos que queremos resolver el sistema con matriz A dada por
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$
La idea es introducir ceros en 1ra columna (debajo del coef. (1,1)).

Observar que eso lo logramos multiplicando a izquierda por
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

y luego multiplicamos
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \checkmark$$

Observar que en el fondo lo que estamos haciendo es multiplicar a izquierda ~~para llevarlo a~~ por matrices triangulares inferiores.

Es decir si $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ tenemos que el proceso de eliminación Gaussiana introduce ceros por debajo de la diagonal mediante la multiplicación de matrices triang. inf. a izquierda, i.e.

$$L_{m-1} L_{m-2} \cdots L_1 A = U$$

con U triang. superior. Denotando $L = L_1^{-1} \cdots L_{m-1}^{-1}$ tenemos que $A = L \cdot U$ con L triang. inf. y U triang. sup. (Podemos resolver el sistema $Ax=b$ por backward sustitución $Ax=b \iff LUx=b \nearrow Ly=b,\ y=Ux$)

Hasta ahora hemos visto 3 tipos $\neq$ de procesos de factorización.

i) $A=QR$ (G-S, "ortogonalización triangular")

ii) $A=QR$ (Householder: "triangularización ortogonal")

iii) $A=L\cdot U$ (E-G: "triangularización triangular")

Observar que si comenzamos por $A=\begin{bmatrix} 0 & * \\ * & * \end{bmatrix}$ ya estamos en problemas. Por lo que lo natural es introducir permutaciones (pivots). Para estudiar la estabilidad se recomienda ver cap. 22 de Trefethen. No lo veremos en este curso.

Factorización de Cholesky

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ una matriz Hermitiana (o simétrica)

Recordar que esto significa que $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ $(a_{ij} = a_{ji})$: $A^* = A$.

Como forma cuadrática tenemos que $x^* A y = \overline{y^* A x}$ $\forall x, y \in \mathbb{C}^m$

$(x^T A y = y^T A x, \ x, y \in \mathbb{R}^m)$

En particular $x^* A x \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{C}^m$.

Si además pedimos $x^* A x > 0$ $\forall x \in \mathbb{C}^m$ entonces decimos que A es <u>hermitiana definida positiva</u> y escribimos $(A > 0)$

Recordar que por ser hermitiana A tiene valores propios reales, y sus vectores propios forman una base ortonormal: i.e.

$A = Q^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} Q$ con Q unitaria. (Teo Spectral)

Si además pedimos $A > 0$ eso sucede sii y sólo si $\lambda_i > 0$.

Si $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$ $(m \geq n)$ de rango máximo, entonces $X^* A X > 0$:

$(X^* A X)^* = X^* A X$ ✓, $x^* X^* A X x = (Xx)^* A (Xx)$

> 0 dado que $Xx \in \mathbb{C}^m$ es no nulo.

Por lo tanto por inducción ~~construimos~~ tenemos

$$A = R_1^* \cdots R_m^* R_m \cdots R_1 .$$

Unicidad: Supongamos $A = R^* R = T^* T$ con T triangular sup. y $t_{ii} > 0$.

Luego $Id = R^{-*} T^* T R^{-1} = (TR^{-1})^* (TR^{-1})$

Observar que TR^{-1} es triangular sup. y por lo anterior se tiene $TR^{-1} = D$ es una matriz diagonal. (col. TR^{-1} son bon. i.e. unitaria.)

La condición $r_{ii} > 0$, $t_{ii} > 0$ implica que los términos de la diagonal de D son positivos y por lo tanto $D = Id$.

$(Id = D^2)$. □

Se puede probar que la cantidad de pasos necesarios para la fact. de Cholesky es del orden $\frac{1}{3} m^3$ pasos, y que sin necesidad de pivote evita todos los problemas que pueden surgir de la eliminación Gaussiana. En particular si $A = R^* R$ entonces $\|R\| = \|R^*\| = \|A\|^{1/2}$ (SVD mediante) y esto significa que los coefs de R se mantienen controlados..