PROBLEMA de VALORES y VECTORES PROPIOS

ALN 2022
Clase 18
3/Nov

Dado $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ matriz cuadrada, $v \in \mathbb{C}^m$, $v \neq 0$ es un vector propio, y $\lambda \in \mathbb{C}$ su valor propio asociado si

$$A v = \lambda v \quad \left(\text{o} \quad (\lambda I_m - A) v = 0 \right)$$

El objetivo de esta parte del curso es estudiar algoritmos para ~~el~~ resolver este problema.

Recordar que si $\lambda \in Sp(A)$ (Spectro de A) entonces

$$p(\lambda) = 0 \quad \text{siendo} \quad p(z) = \det(z I_m - A)$$

su polinomio característico.

En el otro sentido, si $p(z) = z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ es un polinomio la matriz compañera $C_p = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{m-2} \\ & & & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}$

satisface que $Sp(C_p)$ coincide con las raíces de p. Veamos esto. Una forma de probar esto es ver que el pol. característico de C_p es exactamente p: i.e. $p(z) = \det(z I_m - p)$.

Una forma alternativa (lo anterior es simplemente un cálculo) es observar que
$$(1, z, z^2 \cdots z^{m-1})\begin{pmatrix} C_p \end{pmatrix} = (z, z^2, \ldots, z^{m-1}, \underbrace{\qquad}_{-a_0 - a_1 z - \cdots a_{m-1} z^{m-1}})$$
por lo tanto $(1, z, \ldots z^{m-1})$ es vector propio, con valor propio z sii $-a_0 - \cdots\cdots a_{m-1} z^{m-1} = z^m$, i.e sii $p(z) = 0$.

Por un lado la observación anterior, en conjunto con los trabajos de Galois y Abel sobre no solubilidad por radicales de polinomios de grado ≥ 5, nos dice que no vamos a tener ~~el~~ métodos directos de resolución del problema de valores propios. Es decir los métodos de encontrar valores y vectores propios son métodos iterativos.

Por otro lado, en la práctica de los alg. de alg. lineal numérica, se utiliza como método de encontrar raíces de polinomios a ~~la~~ métodos de encontrar valores propios de la matriz compañera. Es decir

$$\text{Soluciones de } p(z)=0 \longrightarrow \text{~~Encontrar~~ Búsqueda de valores propios de } C_p.$$

Factorización de Schur.

Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se puede escribir como $A = Q^{*}TQ$ con Q ortogonal y T triangular superior.

Esta factorización se denomina de Schur.

Observar que en particular A y T tienen mismo espectro y por lo tanto ~~lo~~ los valores propios de A están en la diagonal de T.

La prueba es muy sencilla utilizando el hecho de que sobre $\mathbb{C}$ toda ~~...~~ matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tiene un vector propio.

Sea $v \in \mathbb{C}^{n} \setminus \{0\}$ | $Av = \lambda v$. Sea $U_1 = (v \mid -)$ con U ortogonal. Entonces

$$U_1^{*} A U_1 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ 0 & \hat{A} \\ 0 & \end{array}\right)$$

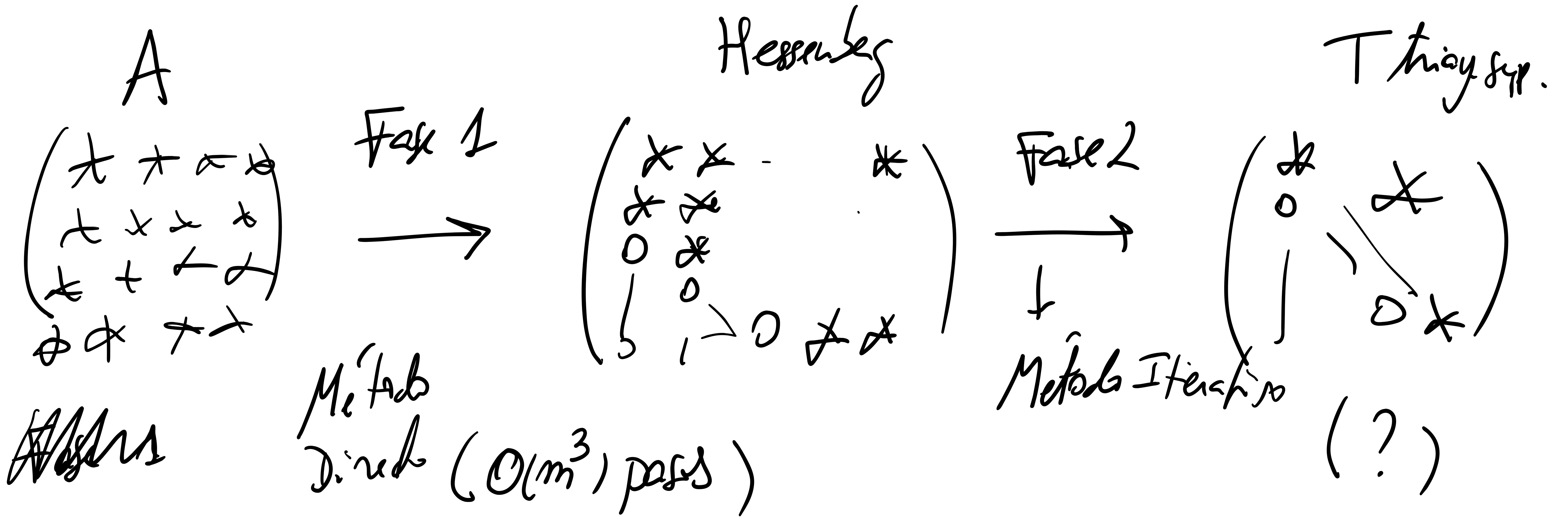
Luego procediendo de manera análoga para $\hat{A} \in \mathbb{C}^{n-1}$ podemos construir $U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \hat{U}_2 \\ 0 & \end{pmatrix}$ siendo $\hat{U}_2$ como antes para luego construir finalmente la matriz Q. ∎

La factorización de Schur es la misma sobre los reales, pero manejándola sobre los complejos. Hay una versión en bloques de 2x2 con los coeffs. reales pero no la veremos.

En general los algoritmos para encontrar val. y vec. propios tienden a encontrar la fact. de Schur. Esto es considera iteraciones del tipo

$$Q_k^* Q_{k-1}^* \cdots Q_1^* A Q_1 \cdots\cdots Q_k \longrightarrow T \text{ triang. superior.}$$

Esquema general de "EigenSolvers"



La idea de la fase 1 es realizar una reducción de nuestra matriz A en forma de Hessenberg manteniendo el espectro.

En el caso Hermitiano la forma de Hessenberg se convierte en tridiagonal $\begin{pmatrix} * & * & & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & * \\ 0 & & * & * \end{pmatrix}$.

Reducción a Hessenberg

Una estrategia ambiciosa que claramente nos llevará al fracaso es utilizar la reflexión de Householder para pasar de

$$A \begin{pmatrix} * & \\ \vdots & \times \\ * & \end{pmatrix} \quad a \quad \begin{pmatrix} * & \\ 0 & \\ \vdots & \times \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \text{realizando } Q_1^* A$$

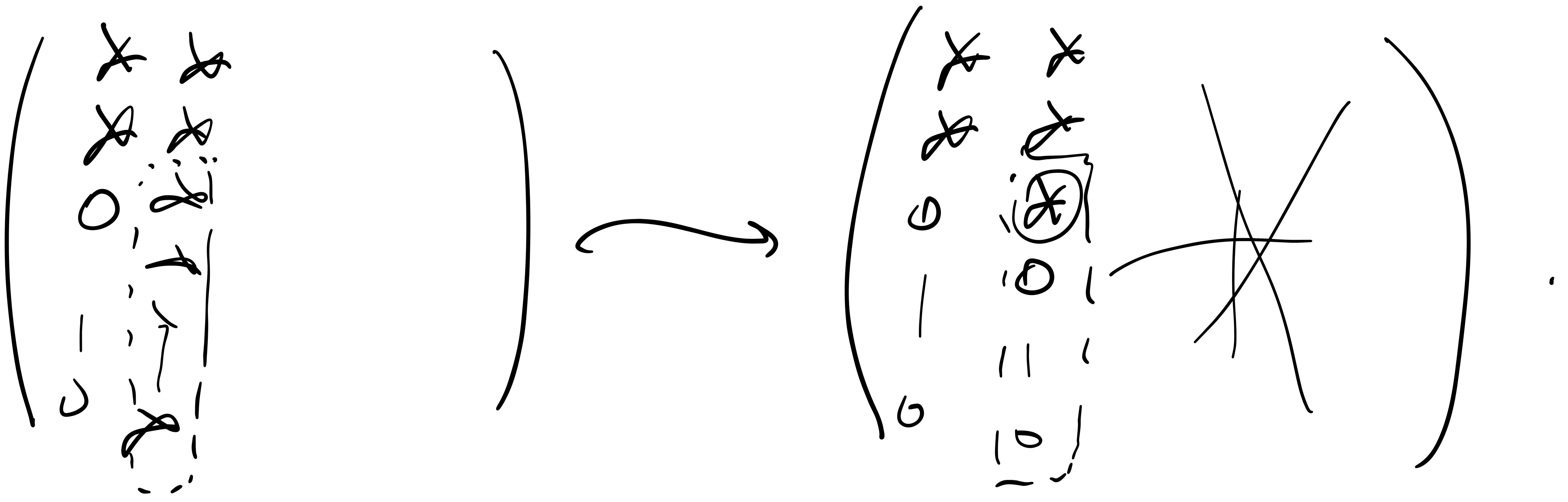
Pero es claro que para mantener el espectro debemos realizar $Q_1^* A Q_1$ y esta última multiplicación nos volverá a introducir nº $\neq 0$ en 1ª columna (recordar que en general las reflexiones de Householder $Id - 2vv^*$ son densas).

Pero una buena estrategia es considerar $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{Q} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ donde $\hat{Q}$ es de Householder y manda

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ b_{21} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y luego $Q^* A Q$ tendría 1ª columna como $\begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Procediendo de igual manera ~~obten~~ en bloques menores



Se puede probar que se necesita del orden $\frac{10}{3} m^3$ operaciones aritméticas. (y $\frac{4}{3} m^3$ en caso Hermitiano $\Rightarrow$ tridiagonal).

Además se puede probar que el algoritmo que acabamos de mostrar es backward-stable: $A = QHQ^*$ con H de Hessenberg entonces $\tilde{Q}$ y $\tilde{H}$ computados satisfacen

$$\tilde{Q}\tilde{H}\tilde{Q}^* = A + \delta A \quad \text{con} \quad \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = O(\varepsilon_{\text{machine}}).$$

$\blacksquare$