Repartido 6. Átomo de Hidrógeno y Teoría de Perturbaciones

1. a) Calcule $\langle r \rangle$ y $\langle r^2 \rangle$ para un electrón en el estado base del hidrógeno. Exprese el resultado en términos del radio de Bohr.

b) Halle $\langle x \rangle$ y $\langle x^2 \rangle$ para un electrón en el estado base del hidrógeno. (Esta parte no requiere integración, note que: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$).

c) Halle $\langle x^2 \rangle$ para el estado $n = 2$, $l = 1$, $m = 1$. Puede usar que: $x = r \operatorname{sen} \theta \cos \theta$.

2. Se quiere averiguar la probabilidad de que un electrón en el estado base del hidrógeno sea encontrado *en el interior del núcleo*. Se supone que el núcleo es esférico, de radio b.

a) Calcule la respuesta exacta, asumiendo que la función de onda es correcta hasta $r = 0$.

b) Expanda el resultado de a) en serie de potencias del número $\epsilon = 2b/a$ y muestre que el término de menor orden es cúbico: $P \simeq (4/3)(b/a)^3$.

c) Calcule ahora la probabilidad suponiendo que $\psi(r)$ es constante dentro del pequeño volumen del núcleo: $P \simeq (4/3)\pi b^3 |\psi(0)|^2$ y verifique que se obtiene lo mismo que en b)

d) Estime P usando $b \simeq 10^{-15} m$ y $a \simeq 0{,}5 \times 10^{-10} m$.

3. En $t = 0$ la función de onda de un átomo de hidrógeno es:

$$\Psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(2\Psi_{100} + \Psi_{210} + \sqrt{2}\Psi_{211} + \sqrt{3}\Psi_{21-1} \right)$$

donde Ψ_{nlm} son las funciones de onda de base.

a) Calcule el valor esperado de la energía del sistema.

b) Calcule $\Psi(\vec{r}, t)$.

c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al sistema con $l = 1$ y $m = 1$ en el tiempo t?

d) Suponga que en una medida se encuentra $L^2 = 2\hbar^2$ y $L_x = \hbar$. Escriba la función de onda inmediatamente después de la medida, en términos de las funciones Ψ_{nlm}.

4. El electrón de un átomo de hidrógeno ocupa el estado (ahora con spin!):

$$|\psi\rangle = R_{21}\left(\sqrt{1/3}\, Y_1^0 \otimes |+\rangle_z + \sqrt{2/3}\, Y_1^1 \otimes |-\rangle_z\right)$$

a) Si se mide L^2, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

b) Repita el cálculo de a) para L_z.

c) Repita el cálculo de a) para S^2.

d) Repita el cálculo de a) para S_z.

5. Considere una partícula de masa m sin spin en un pozo de potencial esférico finito de radio a (partícula confinada en una esfera no rígida):

$$V(r,\theta,\varphi) = -V_0 \quad (r < a) \tag{1}$$
$$V(r,\theta,\varphi) = 0 \quad (r > a) \tag{2}$$

Encuentre la función de onda para el estado fundamental, resolviendo la ecuación radial para $l = 0$ ¿Cuál es el valor mínimo de V_0 para que existan los estados ligados?

6. Considere un átomo hidrogenoide (un electrón vinculado a un núcleo con Z protones).

a) Calcule las energías de Bohr $E_n(Z)$, el radio de Bohr $a_\infty(Z)$ y la constante de Rydberg $\mathcal{R}(Z)$.

b)¿En qué zona del espectro electromagnetico estaría la Serie de Lyman para $Z = 2$ y $Z = 3$?

7. Suponga que ponemos un potencial que es una función delta de Dirac en el centro de un pozo de potencial infinito unidimensional de ancho a: $H = \alpha\delta(x - a/2)$, con α una constante real.

a) Encuentre la corrección de primer orden a las energías permitidas para la partícula en el pozo. Explique por qué las energías E_n no se ven afectadas para n par.

b) Encuentre los primeros tres términos no nulos en el desarrollo de la corrección al estado base de la partícula en el pozo $|\phi_1^1\rangle$.

c) Encuentre la corrección de segundo orden a las energías E_n. Se puede sumar la serie explícitamente, da $-2m(\alpha/\pi\hbar n)^2$ para n impar.

8. Halle la corrección relativista de orden más bajo a los niveles de energía del oscilador armónico unidimensional (pista: escriba el operador momento en términos de los operadores a y $a^\dagger$).

9. Considere un sistema de momento angular $j = 1$.

El espacio de estados es $\{|1\ +1\rangle, |1\ 0\rangle, |1\ -1\rangle\}$, autovectores de J^2 y J_z con los autovalores correspondientes para cada operador.

El Hamiltoniano del sistema es:

$$H_0 = aJ_z + \frac{b}{\hbar}J_z^2$$

donde a y b son constantes positivas con dimensiones de frecuencia angular.

a) ¿Cuáles son los niveles de energía del sistema? ¿Para que valor del cociente b/a existe degeneración?

Se aplica un campo magnético $\vec{B_0}$ en la dirección $\hat{u}(\theta, \varphi)$. La interacción con el campo magnético del momento magnético del sistema se describe con el hamiltoniano

$$W = \omega_0 J_u$$

donde $\omega_0 = -g|B_0|$ es la frecuencia de Larmor y

$$J_u = sen(\theta)cos(\varphi)J_x + sen(\theta)sen(\varphi)J_y + cos(\theta)J_z.$$

b) Escriba la matriz del hamiltoniano W en la base de autoestados de H_0.

c) Asuma que $b = a$ y que $\hat{u} = \hat{x}$, y considere $\omega_0 \ll a$. Calcule las energías y autoestados del sistema perturbado. Las energías a primer orden en ω_0 y los autoestados a orden cero en ω_0.