Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2022

Práctico 8

En este repartido los espacios son de dimensión finita.

1. Para cada uno de los operadores $T \in \mathcal{L}(V)$, investigar si los subespacios W_1 y W_2 son T-invariantes.

    a) $V = \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (z-y,\ x+z,\ z)$, $W_1 = \{(x,y,z) :\ z = 0\}$ y $W_2 = \{(x,y,z) :\ x = 0,\ y = z\}$.

    b) $V = M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)X$, $W_1 = \left\{X \in M_2(\mathbb{R}) :\ X^t = X\right\}$ y $W_2 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) :\ a+b+c+d = 0\right\}$.

2. Sea T un operador en V tal que su polinomio característico se escinde y sea $W \neq \{0\}$ un subespacio T-invariante.

    a) Probar que el polinomio característico de $T|_W$ se escinde.

    b) Deducir que W contiene un vector propio de T.

3. Sea considera $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ definida por $T(x,y) = (x+y,\ y)$. Probar que los subespacios T-invariantes de $\mathbb{R}^2$ son $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ y $W = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = 0\right\}$.

4. Para cada uno de los operadores $T \in \mathcal{L}(V)$ y cada vector $v \in V$, encontrar una base del subespacio T-cíclico generado por v.

    a) $V = \mathbb{R}^4$, $T(x,y,z,t) = (x+y,\ y-z,\ x+z,\ x+t)$, $v = (1,0,0,0)$.

    b) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $T(p(x)) = p''(x)$, $v = x^3$.

    c) $V = M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = X^t$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

    d) $V = M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)X$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{k})$$
donde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ son escalares arbitrarios. Probar
$$\chi_A(t) = (-1)^n \left(t^n - a_{n-1}\, t^{n-1} - \cdots - a_1\, t - a_0\right).$$
Sugerencia: probarlo por inducción en n, desarrollando $\det(A - tI)$ por la primera fila.

6. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $0 \neq v \in V$. Probar que si $w \in S_{v,T}$, entonces existe un polinomio $p(t)$ de grado menor o igual que la dimensión de $S_{v,T}$, tal que $w = p(T)(v)$.

7. Sean V un espacio y $T \in \mathcal{L}(V)$ tales que existe $v \in V$ tal que $V = S_{v,T}$. Probar que un operador $S \in \mathcal{L}(V)$ verifica $ST = TS$ si y solo si existe un polinomio $p(t)$ tal que $S = p(T)$.
Sugerencia: aplicando el ejercicio anterior, elegir $p(t)$ tal que $S(v) = p(T)(v)$.

8. Sean V un espacio de dimensión n. Probar que si un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ tiene n valores propios distintos, entonces existe $v \in V$ tal que $V = S_{v,T}$. *Sugerencia:* considerar $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de vectores propios de T y definir $v = v_1 + \cdots + v_n$.

9. Sea $A \in M_n(\mathbb{k})$ una matriz arbitraria y W el subespacio de $M_n(\mathbb{k})$ generado por el conjunto

$$\{A^n : \ n \in \mathbb{N}\} = \left\{I,\, A,\, A^2,\, A^3, \dots\right\}.$$

   Probar que la dimensión de W es menor o igual que n.

10. *a*) Sea $A \in M_n(\mathbb{k})$ tal que $\chi_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$.

    b) Probar que A es invertible si y solo si $a_0 \neq 0$.

    c) Probar que si A es invertible, entonces

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0}\big((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2 A + a_1 I\big).$$

    d) Aplicar la parte anterior para hallar A^{-1}, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.