Matemática 2 - módulo II | **Universidad de la República**
Curso 2022 | **Facultad de Ciencias**
Centro de Matemática

Módulo 2 – Primer parcial (mañana)

Ejercicio 1. [5+6+4+5 = 20 puntos] Sea $f(x,y) = \frac{x}{x-y^2}$.

a) Hallar el dominio D de f y bosquejarlo.

b) Bosquejar los conjuntos de nivel -1, 0, y 1 para f.

c) Calcular $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ para todo punto $(x,y) \in D$.

d) Calcular $\nabla f(0,1)$ y hallar un vector $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = 1$ y $D_v f(0,1) = 0$.

Solución:

a) El dominio de f es todo el espacio salvo una parábola:

$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq y^2\}$$

b) El conjunto de nivel 0 es la recta $x = 0$ salvo el punto $(0,0)$. El conjunto de nivel 1 es la recta $y = 0$ salvo el $(0,0)$. El conjunto de nivel -1 es la parábola $y^2 = 2x$ salvo el $(0,0)$.

c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y^2}{(x-y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy}{(x-y^2)^2}$$

d) $\nabla f(0,1) = (-1,0)$ y $D_v f(0,1) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \langle \nabla f(0,1), (v_1,v_2)\rangle$ La derivada direccional da 0 si y solo si

$$(-1)v_1 + (0)v_2 = 0$$

Es decir, $v_1 = 0$. Luego los vectores $v = (0,-1)$ y $v = (0,1)$ son los únicos de norma 1 que cumplen esto.

Ejercicio 2. [10+6+4 = 20 puntos] Sea $f(x,y) = x^3 - y^2 - 2xy$.

a) Hallar todos los puntos estacionarios de f y clasificarlos.

b) ¿A qué tiende $f(x,y)$ con $x \to +\infty$ e $y = 0$? ¿A qué tiende $f(x,y)$ con $x = 0$ e $y \to +\infty$?

c) Determinar si f alcanza máximo y/o mínimo absoluto.

Solución:

a)
$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 - 2y, -2y - 2x)\right)$$

El gradiente se anula si y solo si $\begin{cases} \frac{3}{2}x^2 = y \\ y = -x \end{cases}$.

Sustituyendo la primera igualdad en la segunda se obtiene $\frac{3}{2}x^2 = -x$. Es decir
$$x\left(\frac{3}{2}x + 1\right) = 0$$

Esto ocurre cuando $x = 0$ o $x = -\left(\frac{2}{3}\right)$ Por lo tanto los puntos críticos son
$$\begin{cases} (0,0) \\ (-2/3, 2/3) \end{cases}$$

La matriz Hessiana de f es
$$\begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

En el punto crítico $(0,0)$ la matriz evaluada tiene determinante negativo por lo que $(0,0)$ es un punto silla. En el crítico $(-2/3, 2/3)$ la matriz tiene determinante $4 > 0$ y la primer entrada de la matriz negativa, por lo que este crítico es un máximo relativo.

b) $f(x,0) = x^3$ tiende a ∞ con $x \to +\infty$. Por otro lado $f(0,y) = -y^2$ que tiende a $-\infty$ cuando $y \to +\infty$

c) La función f no alcanza máximo ni mínimo absoluto, ya que en el inciso anterior queda probado que la función toma valores arbitrariamente grandes y arbitrariamente chicos.

Módulo 2 – Primer parcial (tarde)

Ejercicio 1. [5+6+4+5 = 20 puntos] Sea $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y}$.

a) Hallar el dominio D de f y bosquejarlo.

b) Bosquejar los conjuntos de nivel -1, 0, y 1 para f.

c) Calcular $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ para todo punto $(x,y) \in D$.

d) Calcular $\nabla f(0,1)$ y hallar un vector $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = 2$ y $D_v f(0,1) = 0$.

Solución:

a) El dominio de f es todo el espacio salvo una parábola:

$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = -x^2\}$$

b) El conjunto de nivel 0 es la recta $x = 0$ salvo el punto $(0,0)$. El conjunto de nivel 1 es la parábola $y = x(1-x)$ salvo el $(0,0)$. El conjunto de nivel -1 es la parábola $y = x(-1-x)$ salvo el $(0,0)$.

c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x^2+y}{(x^2+y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x}{(x^2+y)^2}$$

d) $\nabla f(0,1) = (1,0)$ y $D_v f(0,1) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \langle \nabla f(0,1), (v_1, v_2) \rangle$ La derivada direccional da 0 si y solo si

$$(1)v_1 + (0)v_2 = 0$$

Es decir, $v_1 = 0$. Luego los vectores $v = (0,-2)$ y $v = (0,2)$ son los únicos de norma 2 que cumplen esto.

Ejercicio 2. [10+6+4 = 20 puntos] Sea $f(x,y) = x^2y - y - x^2$.

a) Hallar todos los puntos estacionarios de f y clasificarlos.

b) ¿A qué tiende $f(x,y)$ con $x \to +\infty$ e $y = 0$? ¿A qué tiende $f(x,y)$ con $x = 0$ e $y \to -\infty$?

c) Determinar si f alcanza máximo y/o mínimo absoluto.

Solución:

a)

$$\nabla f(x,y) = \big(2xy - 2x, x^2 - 1)\big)$$

El gradiente se anula si y solo si $\begin{cases} 2x(y-1) = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases}$. Por lo tanto los puntos críticos son

$$\begin{cases} (1,1) \\ (-1,1) \end{cases}$$

La matriz Hessiana de f es

$$\begin{pmatrix} 2y-2 & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

En ambos puntos críticos la matriz evaluada tiene determinante negativo (igual a -4) por lo que ambos son puntos silla.

b) $f(x,0) = -x^2$ tiende a $-\infty$ con $x \to +\infty$. Por otro lado $f(0,y) = -y$ que tiende a $+\infty$ cuando $y \to -\infty$

c) La función f no alcanza máximo ni mínimo absoluto, ya que en el inciso anterior queda probado que la función toma valores arbitrariamente grandes y arbitrariamente chicos.