Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Teoría de Representaciones
Año 2022

Repartido 7: Álgebras de monoide y biálgebras.

Se pide que escriban cada uno de estos ejercicios de manera prolija, para que el material sirva como notas de las partes del curso para las cuales no presenté referencia bibliográfica. Son todos resultados vistos en clase y que pueden ser preguntados en el examen oral.

1. Enunciar y demostrar (a partir el Teorema de Wedderburn-Artin para anillos) el resultado (de W-A) para $\Bbbk$-álgebras de dimensión finita, y para el caso particular en que $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado.

2. Sean G un grupo finito y $\Bbbk$ un cuerpo. Probar que $\Bbbk G$ es semisimple si y sólo si $char \Bbbk$ no divide al orden de G. (Ejercicio que ya estaba en el repartido anterior).

3. Sean M un monoide y $\Bbbk$ un cuerpo.

   a) Definir la $\Bbbk$-álgebra de monoide $\Bbbk M$.

   b) Probar que si V, W son $\Bbbk M$-módulos a izquierda (derecha) entonces $V \otimes_{\Bbbk} W$ también lo es y que $(V \otimes_{\Bbbk} W) \otimes_{\Bbbk} U$ es isomorfo a $V \otimes_{\Bbbk} (W \otimes_{\Bbbk} U)$ como $\Bbbk M$-módulos a izquierda.

   c) Probar que $\Bbbk$ es un $\Bbbk M$ -módulo a izquierda (derecha) y que $V \otimes_{\Bbbk} \Bbbk$, V y $\Bbbk \otimes_{\Bbbk} V$ son isomorfos como $\Bbbk M$-módulos a izquierda.

   d) Probar que si M es un grupo, entonces V^* es un $\Bbbk M$ -módulo a izquierda (derecha) si V lo es, y que la evaluación $ev : V^* \otimes_{\Bbbk} V \to \Bbbk$ es un morfismo de $\Bbbk G$-módulos a izquierda.

4. *a*) Escribir la definición de $\Bbbk$-coálgebra (C, Δ, ε), $\Bbbk$ un cuerpo.

   b) Probar que $\Bbbk[x]$ con $\delta(x^n) = \sum_{i+j=n} x_i \otimes x^j, \varepsilon(x^n) = \delta_{n,0}$ definen una $\Bbbk$-coálgebra. Observar que ε es un morfismo de $\Bbbk$-álgebras (con la estructura usual de $\Bbbk$-álgebra de $\Bbbk[x]$) pero que Δ no lo es.

   c) Escribir la definición de biálgebra $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$.

   d) Probar que $\Bbbk[x]$ con $\delta(x^n) = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} x_i \otimes x^j, \varepsilon(x^n) = \delta_{n,0}$ definen una $\Bbbk$-biálgebra con la estructura de $\Bbbk$-álgebra usual en $\Bbbk[x]$.

   e) Probar que $\Bbbk M$ es una $\Bbbk$-biálgebra con la estructura trivial de $\Bbbk$-coálgebra, para cualquier monoide M:

5. Probar que si $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ es una $\Bbbk$-biálgebra, entonces:

   a) si V, W son A-módulos a izquierda (derecha) entonces $V \otimes_{\Bbbk} W$ también lo es y que $(V \otimes_{\Bbbk} W) \otimes_{\Bbbk} U$ es isomorfo a $V \otimes_{\Bbbk} (W \otimes_{\Bbbk} U)$ como A-módulos a izquierda.

   b) $\Bbbk$ es un A -módulo a izquierda (derecha) y $V \otimes_{\Bbbk} \Bbbk$, V y $\Bbbk \otimes_{\Bbbk} V$ son isomorfos como A-módulos a izquierda.

6. Sean (A, m, u) y (C, Δ, ε) respectivamente una $\Bbbk$-álgebra y una $\Bbbk$-coálgebra.

a) Definir el producto de convolución en $Hom_{\Bbbk}(C, A)$ y probar que es asociativo y con neutro $u\varepsilon$.

b) Un álgebra de Hopf es una biálgebra B tal que $id_B \in Hom_{\Bbbk}(B, B)$ es invertible por convolución. A su inversa se le llama antípoda y se la nota S. Explicitar, por un lado con diagramas, por otro lado con fórmulas, la definición de S.)

7. *a*) Probar que $\Bbbk G$ con la estructura del ejercicio $4e$ admite una antípoda que la hace $\Bbbk$-álgebra de Hopf para cualquier grupo G.

   b) Idem para $\Bbbk[x]$ con la estructura del ejercicio $4d$.

8. Probar que la antípoda de un álgebra de Hopf es un antimorfismo de álgebras (esto es preserva la unidad y antipresreva el producto) y un antimorfismo de coálgebras (esto es, preserva la counidad y antipreserva el producto).
(Sugerencia: para la parte de antimorfismo de álgebras: considerar las funciones m, $m \circ (S \otimes S)$ y $S \circ m^{op}$ y el producto de convolución en $Hom(H \otimes H, H)$.)

9. Probar que si V es un módulo a izquierda sobre un álgebra de Hopf H, entonces V^* también lo es y la evaluación $ev : V^* \otimes V \to \Bbbk$ es un morfismo de H-módulos a izquierda.
Para V de dimensión finita con base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, probar que la coevaluación $coev : \Bbbk \to V \otimes V^*$ dada por $coev(1) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i^*$ está bien definida y es un morfismo de H-módulos a izquierda.