Mecánica cuántica 2022 POSGRADO. Momento angular.

35.

a. Considere el operador (3 S_x + 4 S_y)/5. Deduzca sus autovalores y calcule la probabilidad de que en una medida de este observable en el estado $\frac{1}{\sqrt{5}}\binom{2}{1}$ se obtenga -ħ/2.

b. Considere el espinor$\frac{1}{\sqrt{65}}\binom{4}{7}$; calcule la probabilidad de que en una medida de este observable en el estado se obtenga -ħ/2.

36.

Considere dos partículas con espín ½ cuyos espines se describen con los operadores de Pauli $\vec{\sigma}_1$ y $\vec{\sigma}_2$. Sea $\hat{n}$ el vector unidad entre las dos partículas y considere el operador $S_{12} = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{n})\,(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{n}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$. Muestre que este operador aniquila el estado singlete y que $(S_{12} - 2)(S_{12} + 4)$ aniquila el estado triplete.

37.

En un sistema neutrón-protón a bajas energías (momento angular orbital cero) la energía potencial está dada por

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r)\left(3\frac{(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{r})\,(\vec{\sigma}_2\cdot\vec{r})}{r^2} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2\right) + V_3(r)\,\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2\,,$$

en donde $\vec{r}$ es el vector que conecta ambas particulas. Calcule la energía del sistema en el estado singlete y en el estado triplete.

38.

Considere dos electrones en el estado singlete.

a. Si una medida sobre uno de los electrones da +, calcule la probabilidad de que una medida sobre el otro electrón de +.

b. Una medida sobre uno de los electrones da s_y = +. Calcule la probabilidad de que una medida de s_x sobre el segundo electrón de +.

c. Si el electrón 1 está en el estado $\cos\alpha_1\,\chi_+$ + $\sin\alpha_1\, e^{\beta_1}\chi_-$ y el electrón 2 está en el estado $\cos\alpha_2\,\chi_+$ + $\sin\alpha_2\, e^{\beta_2}\chi_-$ calcule la probabilidad de que los dos electrones se encuentren en el estado triplete.

39.

Una partícula de espín 1 se mueve en un potencial de la forma:

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r)\frac{\vec{S}\cdot\vec{L}}{\hbar^2} + V_3(r)\left(\frac{\vec{S}\cdot\vec{L}}{\hbar^2}\right)^2$$

Calcule los valores de V(r) en los estados con J = L $\pm$ 1.

40.

Considere $\mathcal{D}^{1/2}(\alpha,\beta,\gamma)$. , el operador rotación sobre estados en términos de los ángulos de Euler. Este operador proviene de una rotación alrededor de un eje, y con un cierto ángulo Φ. Calcule este ángulo en función de los ángulos de Euler.

41.

Un electrón en el átomo de hidrógeno se encuentra en el estado
$R_{21}(r)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,Y_1^0\,\chi_+ + \sqrt{\frac{2}{3}}\,Y_1^1\,\chi_-\right)$.

a. Si se mide $\mathbf{L}^2$ calcule los valores posibles y las probabilidades.
b. Idem L_z.
c. Idem $\mathbf{S}^2$.
d. Idem S_z.
e. Idem $\mathbf{J}^2$.
f. Idem J_z.
h. Si se mide la posición de la partícula, calcule la densidad de probabilidad correspondiente.
i. Si se mide simultáneamente S_z y la distancia al origen, r, caclule la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula con espin + y a distancia r.

42.

El estado |j,j> es rotado alrededor del eje y un ángulo infinitesimal ε. Sin usar la forma explícita de la función $d^{(j)}_{m,m'}$ calcule a orden ε^2 la probabilidad de que una medida sobre el estado rotado obtenga el estado original.

43.

Considere una partícula con momento angular intrínseco 1. Su estado se escribe como $|\psi\rangle$ cuya función de onda es $\psi^i(\vec{r}) = \langle\vec{r};i|\psi\rangle$ y donde $|\vec{r},i\rangle$ es el estado de la partícula en la posición $\vec{r}$ con espín en la dirección i.

a. Muestre explicitamente que una rotación sobre el estado transforma $\psi^i(\vec{r})$ con el operador $u_\varepsilon = 1 - i\frac{\vec{\epsilon}}{\hbar}\cdot(\vec{L}+\vec{S})$ donde $\vec{L} = \frac{\hbar}{i}\hat{r}\times\vec{\nabla}$. Determine $\vec{S}$.
b. Muestre que $\vec{S}$ y $\vec{L}$ conmutan.
c. Deduzca las relaciones de conmutación de $\vec{S}$.
d. Muestre que $\vec{\nabla}\times\vec{\psi}(\vec{r}) = \frac{1}{\hbar^2}(\vec{S}\cdot\vec{p})\,\vec{\psi}(\vec{r})$, en dónde $\vec{p}$ es el operador impulso.

44.

Para dos momentos angulares $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$, deduzca, utilizando los operadores de subida y bajada, los coeficientes de CG.