Integrales dobles.

Función de una variable $\longrightarrow$ Integral = Área bajo el gráfico

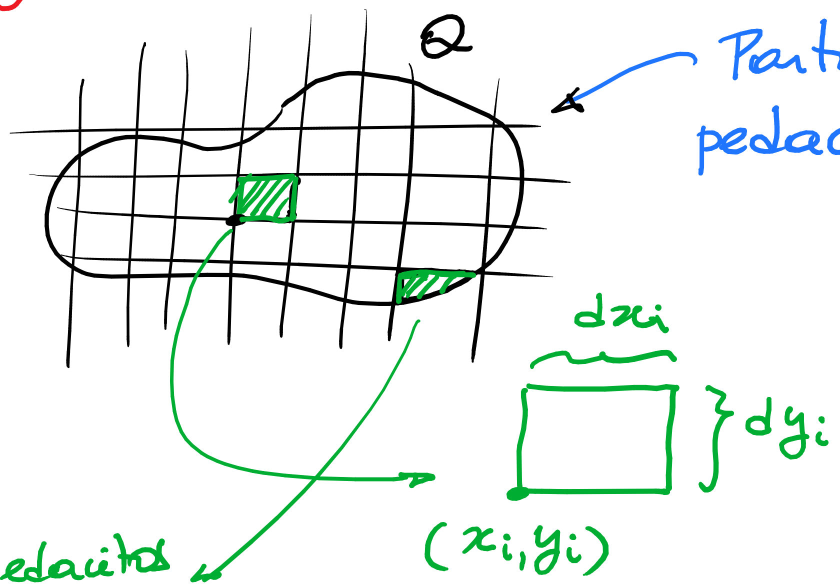
Función de dos variables $\longrightarrow$ Integral = Volumen bajo el gráfico

Así, si $f: D \to \mathbb{R}$ es una función de dos variables y $Q \subset D$, el volumen bajo el gráfico de f en el conjunto Q es la "integral" de f en Q:

$$\int_Q f$$

$\longrightarrow$ ¿Cómo se define?

Partimos Q en pedacitos.



Algunos pedacitos no son rectángulos

Área del un pedacito

$da_i \approx dx_i dy_i$

Volumen en un pedacito $\approx f(x_i, y_i)\, da_i$

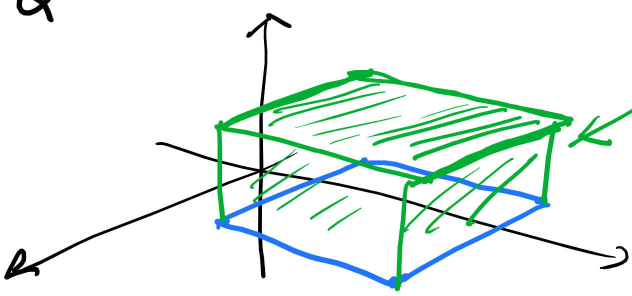
$\Longrightarrow$

$$\int_Q f(x,y)\,da = \text{“límite” cuando los pedacitos se hacen arbitrariamente chicos } \sum_i f(x_i,y_i)\,dx_i\,dy_i$$

Si existe ese límite decimos que f es integrable en Q.

<u>Ejemplo</u>: Si Q es un rectángulo y $f(x,y)=c$ es constante, entonces

$$\int_Q f(x,y)\,da = \underbrace{c\cdot \text{área}(Q)}_{\text{volumen del paralelepípedo}}$$



<u>Teorema</u>: Sea $Q=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ y supongamos que f es continua en Q. Entonces f es integrable en Q y se tiene

$$\int_Q f(x,y)\,da = \overbrace{\int_c^d \Big[\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{\text{fijamos } y \text{ e integramos con respecto a } x}\Big]\,dy}^{\text{después integramos con respecto a } y} = \overbrace{\int_a^b\Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]\,dx}^{\text{hacemos al revés}}$$

Obs: Si la función es negativa el gráfico está por debajo del plano xy y el "volumen" se toma negativo para calcular la integral.

Ejemplos de cálculo de integrales.

1) $Q = [-1,1]\times[0,\pi/2]$, $f(x,y) = x \operatorname{sen} y - y e^{x}$

$$\int_Q f(x,y)\,da = \int_0^{\pi/2} A(y)\,dy$$

Área de la rebanada

$$A(y) = \int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx = \int_{-1}^{1} (x \operatorname{sen} y - y e^{x})\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}\operatorname{sen} y - y e^{x}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} y} - ye - \cancel{\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} y} + y e^{-1} =$$

$$= y\left(\frac{1}{e} - e\right)$$

$$\int_Q f(x,y)\,da = \int_0^{\pi/2} y\left(\frac{1}{e}-e\right)dy = \frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{e}-e\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \boxed{\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{e}-e\right)}$$

¿Y si calculamos integrando primero con respecto a y?

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_{0}^{\pi/2}(x \operatorname{sen} y - y e^{x})\,dy\right]dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(-x\cos y - \frac{y^2}{2}e^{x}\right)\Big|_{0}^{\pi/2} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(-\frac{\pi^2}{8}e^{x} + x\right)dx = \left(-\frac{\pi^2}{8}e^{x} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

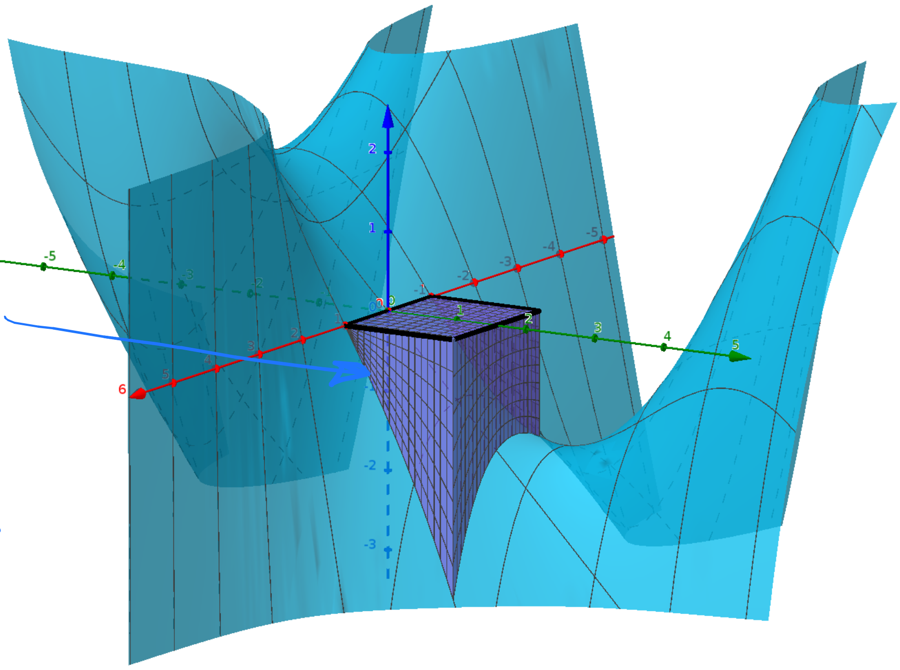
$$= -\frac{\pi^2}{8}e^{1} + \frac{\pi^2}{8}e^{-1} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{e} - e\right)$$

¡lo mismo!

La función es negativa en Q.

$\Downarrow$

La integral es negativa



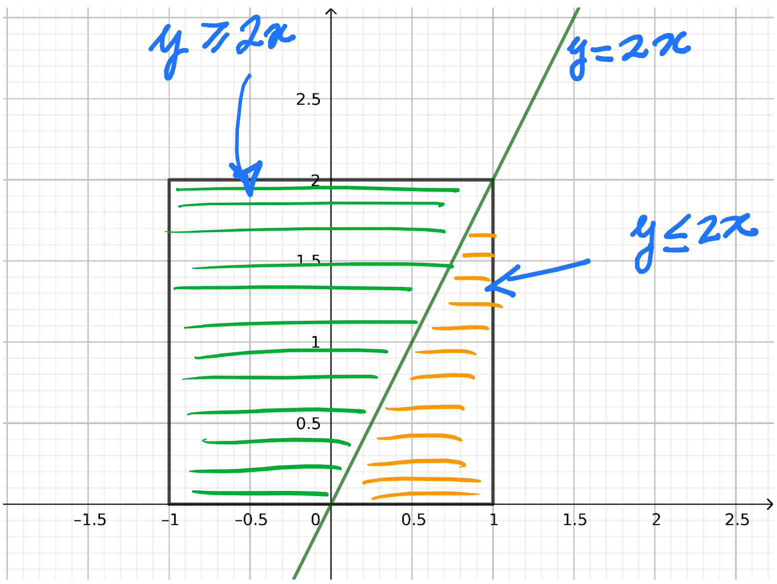
Esto lo podemos verificar pues $\frac{1}{e} < e$.

2) $Q = [-1,1] \times [0,2]$, $f(x,y) = \sqrt{|y-2x|}$

$$\int_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \underbrace{\left[\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\right]}_{A(y)} dy$$

$$A(y) = \int_{-1}^{1} \sqrt{|y-2x|}\,dx$$

$$|y-2x| = \begin{cases} y-2x & y \geqslant 2x \\ 2x-y & y \leq 2x \end{cases}$$



$$\int_{-1}^{1} \sqrt{|y-2x|}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{y/2} \sqrt{y-2x}\,dx + \int_{y/2}^{1} \sqrt{2x-y}\,dx$$

$$\int_{-1}^{y/2} \sqrt{y-2x}\,dx = -\frac{1}{3}(y-2x)^{3/2}\Big|_{-1}^{y/2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\cancel{y} - \cancel{2}\,\cancel{\frac{y}{2}}\right)^{3/2} + \frac{1}{3}(y+2)^{3/2}$$

$$= \frac{1}{3}(y+2)^{3/2}$$

$$\int_{y/2}^{1} \sqrt{2x-y}\,dx = \frac{1}{3}(2x-y)^{3/2}\Big|_{y/2}^{1} =$$

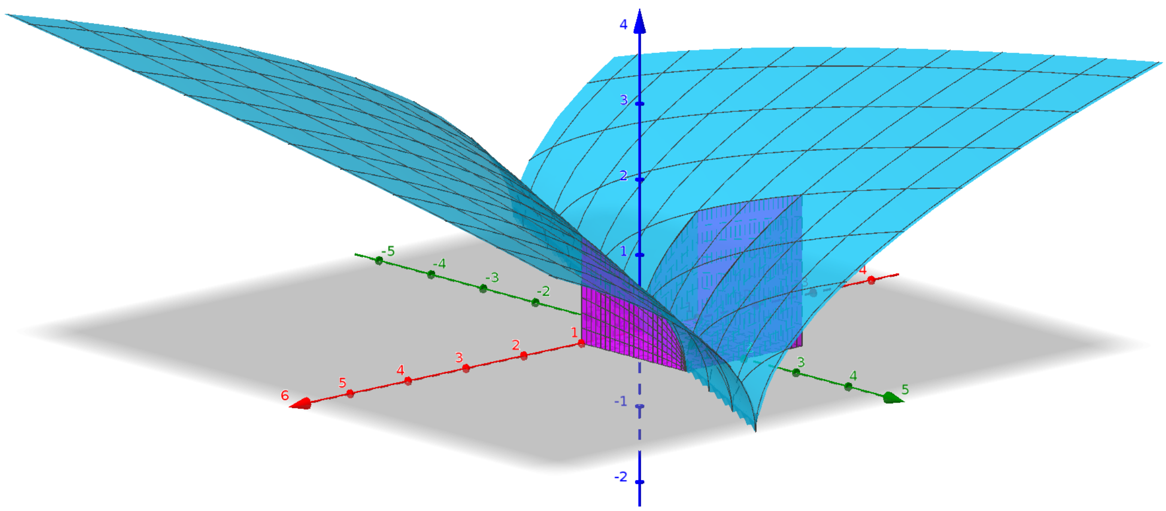
$$= \frac{1}{3}(2-y)^{3/2} - \frac{1}{3}\underbrace{\cancel{\left(2\frac{y}{2}-y\right)^{3/2}}}_{=0} =$$

$$= \frac{1}{3}(2-y)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\sqrt{|y-2x|}\,dx = \frac{1}{3}(y+2)^{3/2}+\frac{1}{3}(2-y)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \int_Q \sqrt{|y-2x|}\,dx\,dy = \int_0^2 \frac{1}{3}(y+2)^{3/2}+\frac{1}{3}(2-y)^{3/2}\,dy =$$

$$= \frac{2}{15}(y+2)^{5/2} - \frac{2}{15}(2-y)^{5/2}\Big|_0^2 = \boxed{\frac{2^6}{15}}$$

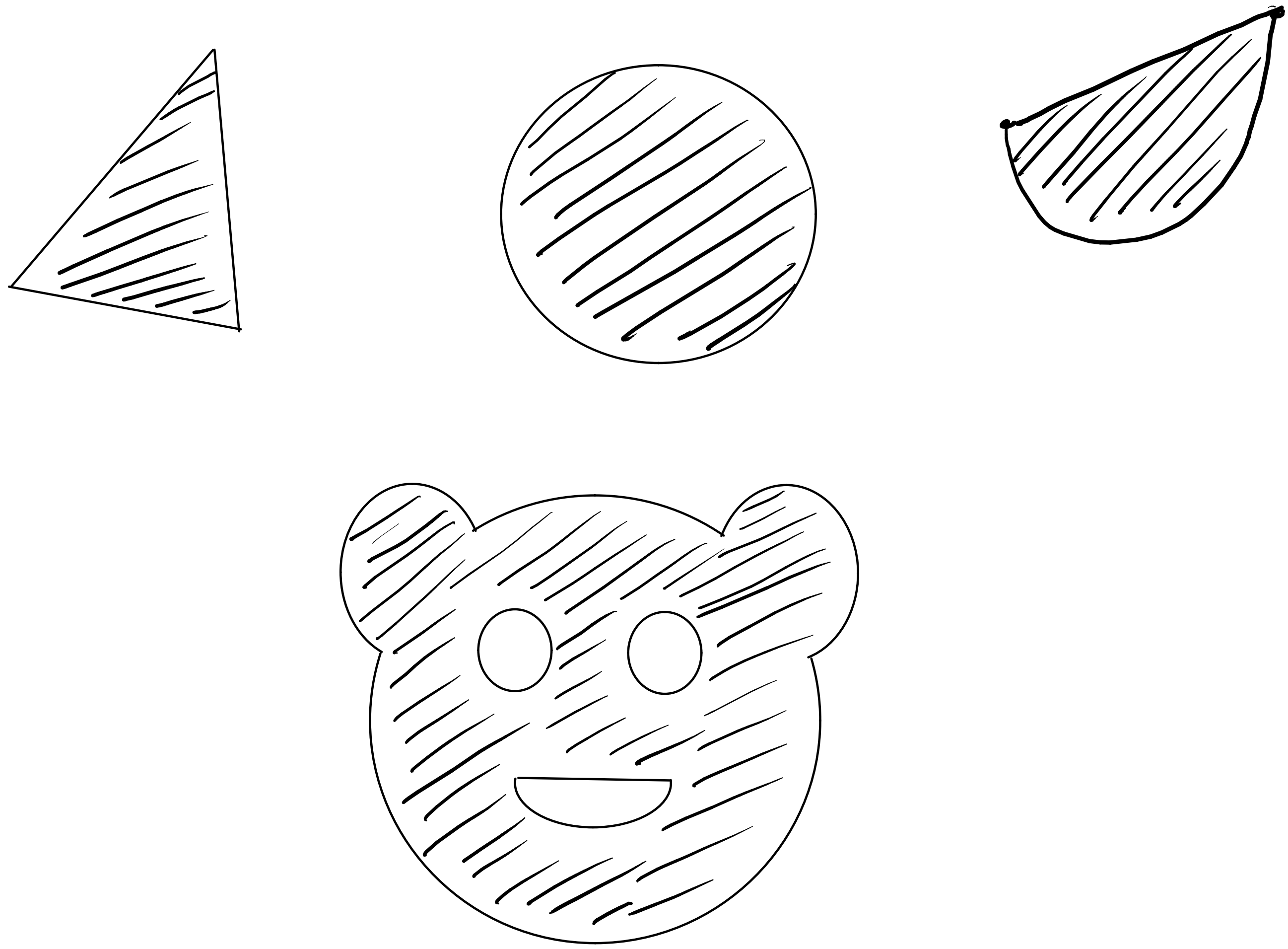


Integrales en conjuntos más generales.

Teorema: Si $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y $Q \subset D$ es un conjunto "lindo", entonces f es integrable en Q.

Lindo:
- acotado
- su borde tiene área nula.
  Por ejemplo, conjuntos delimitados por gráficos de funciones.

Ejemplos de conjuntos lindos:



Supongamos que queremos integrar en un conjunto de la siguiente forma

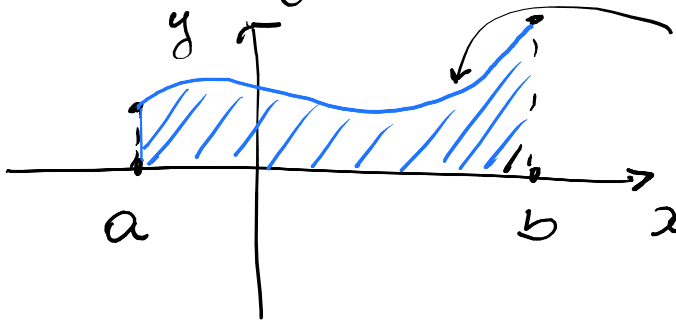


gráfico de una función continua $\varphi \geq 0$

$$\longrightarrow \quad Q = \{ (x,y) \;:\; a \leq x \leq b \,,\; 0 \leq y \leq \varphi(x) \}$$

Análogamente si $\varphi \leq 0$.

La integral de una función continua $f(x,y)$ en ese dominio Q también se puede calcular por iteración de integrales de una variable:

$$\int_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\underbrace{a}_{\text{después en } x}}^{b} dx \int_{\underbrace{0}_{\text{Primero integramos en } y}}^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy$$

Si la región donde queremos integrar es de la forma

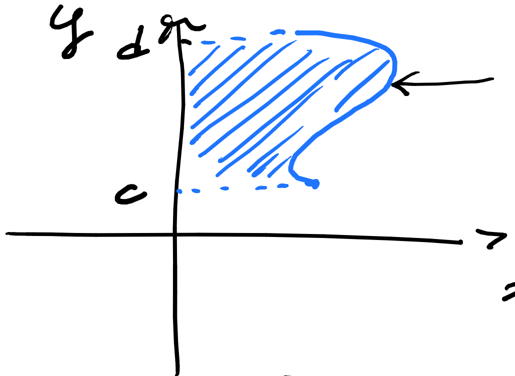


gráfico de una función $\psi(y)$

podemos hacer lo mismo:

$$\int_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^{\overbrace{d}^{\text{después respecto a } y}} dy \int_0^{\overbrace{\psi(y)}^{\text{Primero respecto a } x}} f(x,y)\,dx$$

Propiedades básicas de la integral:

Digamos que f y g son funciones integrables en la región Q. Entonces:

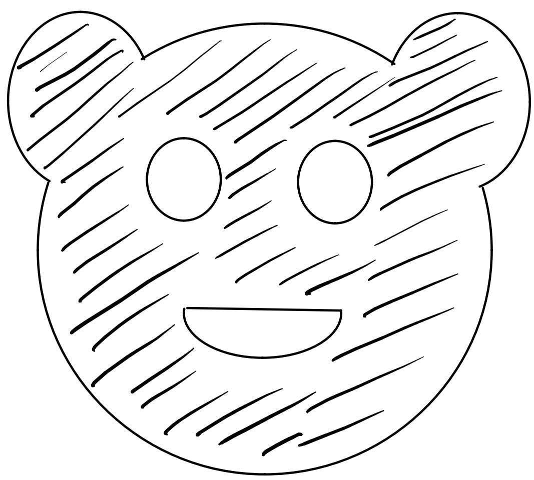
1) $$\int_Q (f+g) = \int_Q f + \int_Q g .$$

2) $$\int_Q (cf) = c\int_Q f$$ para toda constante $c \in \mathbb{R}$.

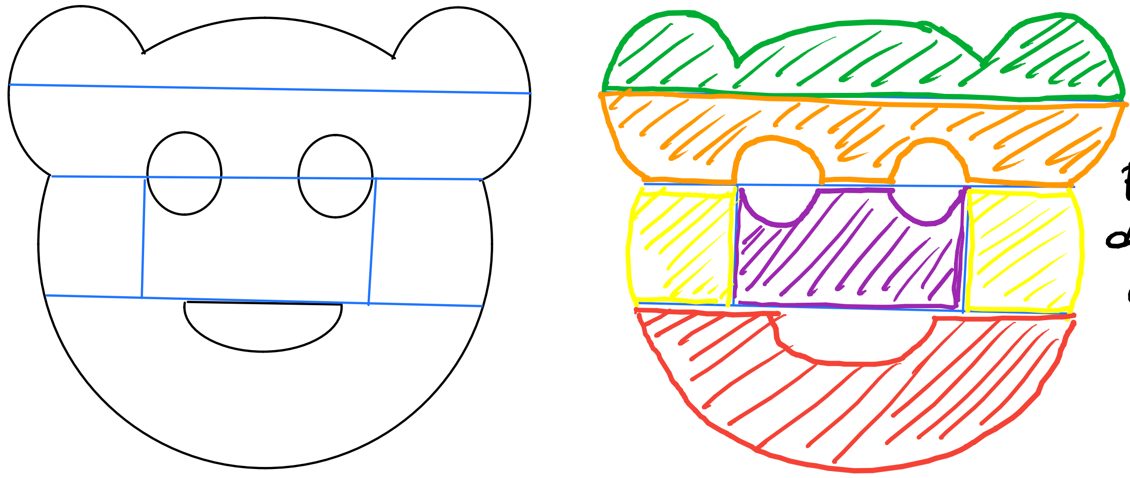
3) Si $Q = Q_1 \cup Q_2$ (siendo Q_1 y Q_2 lindos) y $Q_1 \cap Q_2$ tiene área nula
$$\int_Q f = \int_{Q_1} f + \int_{Q_2} f .$$

4) Si $f \geq g$ en $Q \Rightarrow \int_Q f \geq \int_Q g$.

Las propiedades 1, 2 y 3 nos permiten simplificar el cálculo de integrales. Si queremos integrar, por ejemplo, en

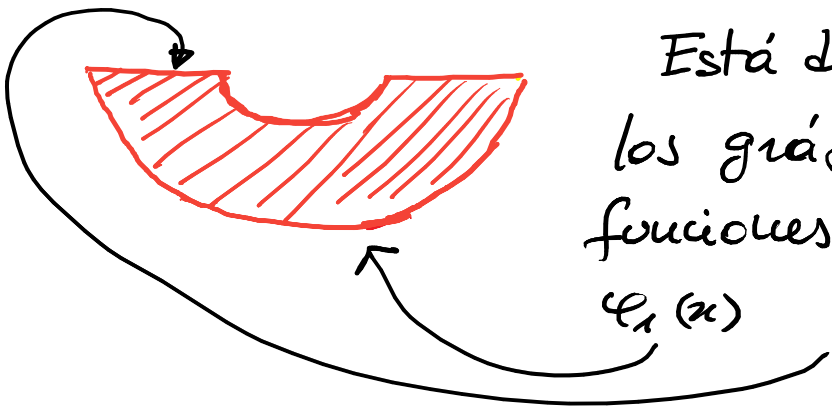


podemos dividir en varios pedazos



Cada pedazo está delimitado por gráficos de funciones continuas

Integramos en cada pedazo y luego sumamos todo. Por ejemplo



Está delimitado por los gráficos de dos funciones continuas

$\varphi_1(x)$ $\varphi_2(x)$

$$\longrightarrow \int f(x,y) = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \,.$$

y así con cada uno.

Ejemplos:

1) Calcular $\int_Q \cos(x+y)\,dx\,dy$, siendo Q el triángulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$ y (π,π).

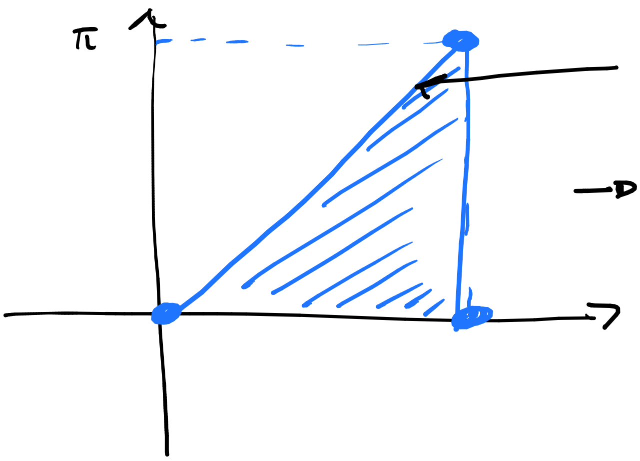


gráfico de la función $\varphi(x) = x$

$$\rightarrow \int_Q \cos(x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{x} \cos(x+y)\,dy$$

$$\int_0^x \cos(x+y)\,dy = \operatorname{sen}(x+y)\Big|_0^x = \operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(x)$$

$$\Rightarrow \int_Q \cos(x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= \underbrace{\cancel{-\frac{1}{2}\cos(2x)\Big|_0^{\pi}}}_{=0} + \cos(x)\Big|_0^{\pi} = -2$$

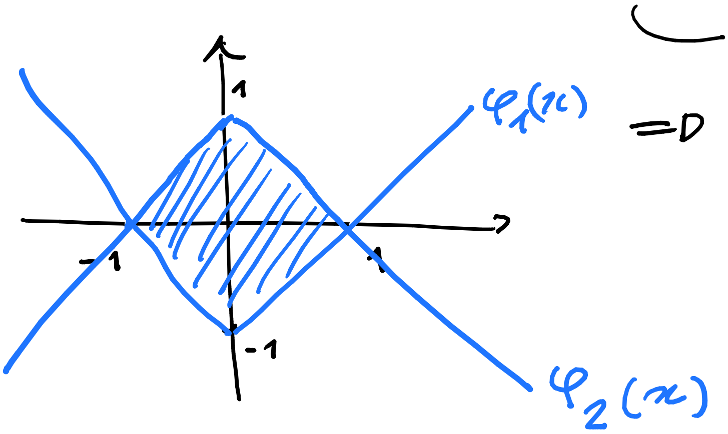
$$\Rightarrow \boxed{\int_Q \cos(x+y)\,dx\,dy = -2}$$

2) Calcular $\int_Q e^{x+y}\,dx\,dy$ siendo

$$Q = \{(x,y) : \underbrace{|x| + |y| \leq 1}\}$$

$$\rightarrow |y| \leq 1 - |x|$$

$$\Rightarrow \underbrace{-1+|x|}_{\varphi_1(x)} \leq y \leq \underbrace{1-|x|}_{\varphi_2(x)}$$



$$\int_Q e^{x+y}\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1+|x|}^{1-|x|} e^{x+y}\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1+|x|}^{1-|x|} e^{x} e^{y}\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx\, e^{x} \int_{-1+|x|}^{1-|x|} e^{y}\,dy = \int_{-1}^{1} e^{x}\left(e^{1-|x|} - e^{-1+|x|} \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{0} e^{x}\left(e^{1+x} - e^{-1-x} \right) dx + \int_{0}^{1} e^{x}\left(e^{1-x} - e^{-1+x} \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(e^{1+2x} - e^{-1} \right) dx + \int_{0}^{1} \left(e - e^{-1+2x} \right) dx =$$

$$= \boxed{e - \frac{1}{e}} \,.$$

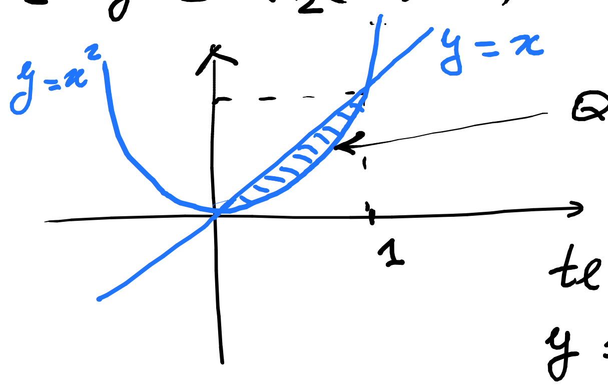
3) Considerar la integral iterada

$$\int_{0}^{1} dx \int_{x^2 \leftarrow \varphi_1(x)}^{x \leftarrow \varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \,.$$

Determinar la región Q donde se está integrando f y cambiar el orden de integración.

$$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \,, \qquad 0 \le x \le 1$$

$\Rightarrow$



Si queremos integrar en el otro orden tenemos que poner

$$y \le x \le \sqrt{y} \qquad 0 \le y \le 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx .$$

Áreas como integrales dobles.

Si integramos la función constante igual a 1 en un conjunto (lindo) $Q \subset \mathbb{R}^2$, lo que obtenemos es el área del conjunto:

$$\boxed{\int_Q 1\,\underline{dx\,dy} = \text{área}(Q)}$$

También escribimos $\int_Q dx\,dy$

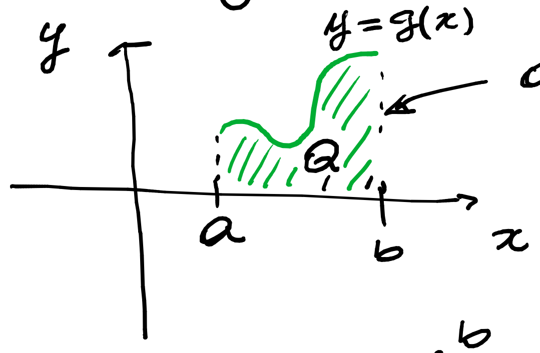
Estamos sumando las áreas de los rectángulos de la subdivisión y en el límite nos queda el área de Q.

Un resultado que es útil para estimar integrales es el siguiente.

Teorema: Si $m \leq f(x,y) \leq M$ para $(x,y) \in Q$, entonces

$$m \cdot \text{área}(Q) \leq \int_Q f(x,y)\,dx\,dy \leq M \cdot \text{área}(Q).$$

Observar que esto es coherente con la definición de integral en una variable.

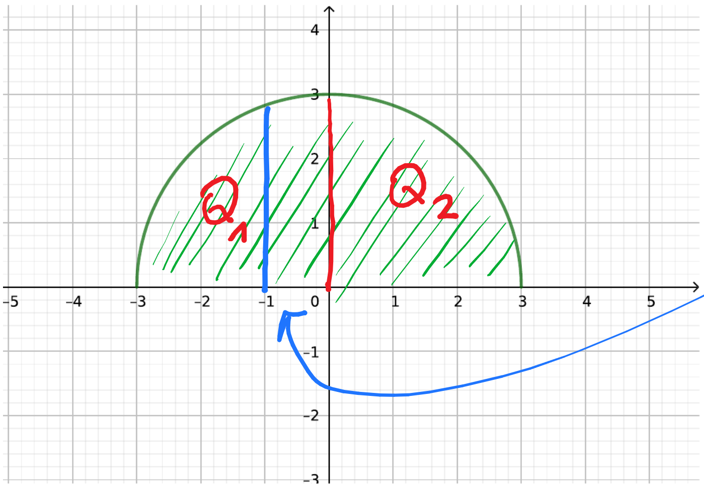


$$\text{área}(Q) = \int_a^b g(x)\,dx \quad \checkmark$$

$$\int_Q 1 . dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por iteración}}}{=} \int_a^b dx \int_0^{g(x)} 1\,dy = \int_a^b y \Big|_0^{g(x)} dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

Ejemplo. Sea $Q = \{ (x,y) : 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \}$. calcular $\int_Q \underbrace{x+2}\,da$.

depende sólo de x



Es constante en segmentos verticales

$$\int_Q x+2\,da = \int_Q x\,da + \int_Q 2\,da =$$

$$= \int_Q x\,da + 2\int_Q da = \int_Q x\,da + 2\,\text{área}(Q) =$$

$$= \int_Q x\,da + \cancel{2}\,\pi\,\frac{3^2}{\cancel{2}} = \int_Q x\,da + 9\pi$$

$$\int_Q x\,da = \int_{Q_1} x\,da + \int_{Q_2} x\,da \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por simetría.}}}{=} 0$$

$$\boxed{\int_Q x+2\,da = 9\pi}$$

Cambio de variables.

Un cambio de variables en una integral doble corresponde a cambiar las variables x, y por nuevas variables u, v de manera que

$$\begin{cases} x = h_1(u,v) \\ y = h_2(u,v) \end{cases}$$

y a su vez se pueden despejar u y v como funciones de x e y

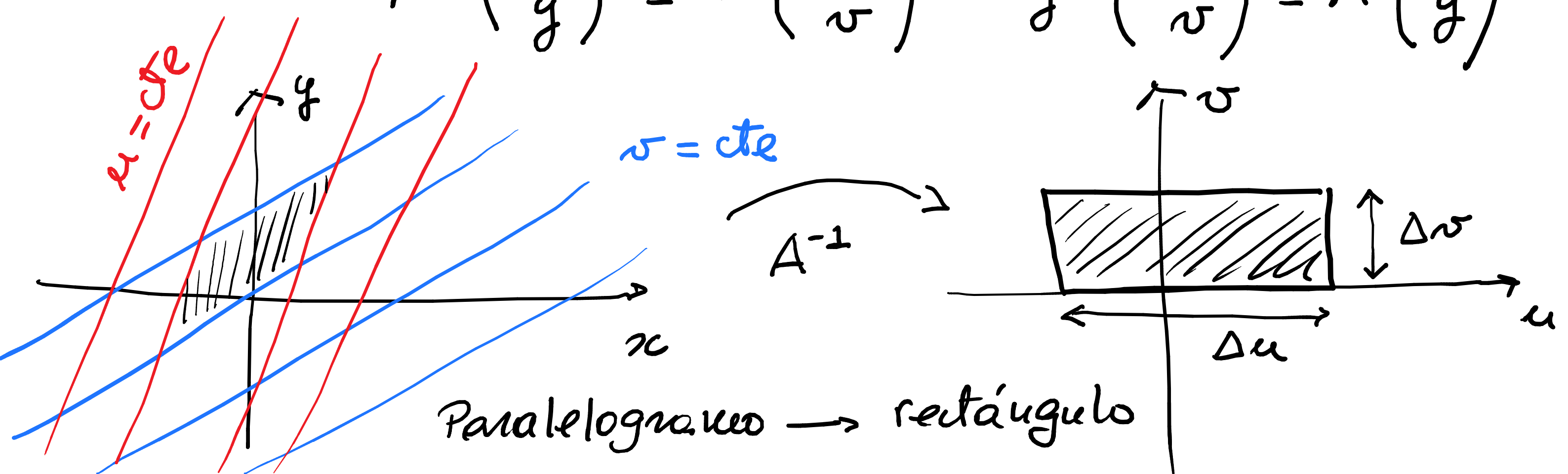
$$\begin{cases} u = g_1(x,y) \\ v = g_2(x,y) \end{cases}$$

Cambio lineal de variables:

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es una matriz invertible podemos hacer un cambio de variables definiendo nuevas variables u, v por

$$\begin{cases} x = a_{11}u + a_{12}v \\ y = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$$

Entonces, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Paralelogramo → rectángulo

área rectángulo $= \det(A^{-1})$ área paralelogramo

$\longrightarrow$ área paralelogramo $= \det(A)\cdot \Delta u\,\Delta v$

Si calculamos la integral de $f(x,y)$ haciendo subdivisiones en paralelogramos delimitados por rectas $u=\text{cte}$, $v=\text{cte}$ obtendremos entonces que en el límite

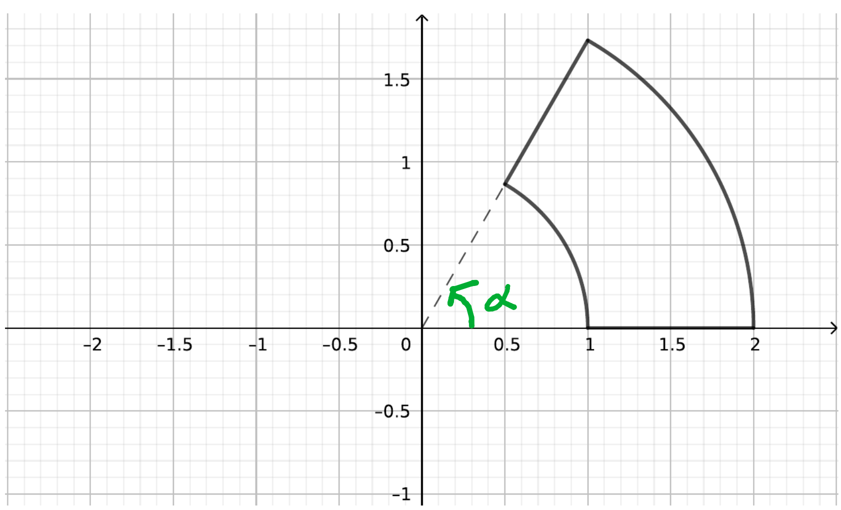
$$\int_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_Q f(a_{11}u+a_{12}v,\ a_{21}u+a_{22}v)\boxed{\det(A)}\,du\,dv$$

es una constante

Esta es la fórmula de cambio de variables para un cambio lineal.

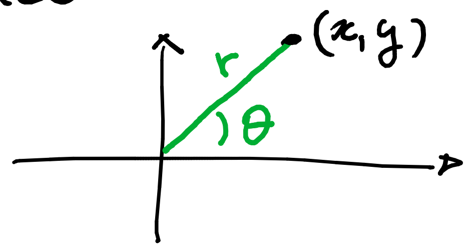
Coordenadas polares.

Si queremos calcular la integral de una función $f(x,y)$ en una región de la forma



puede ser complicado hacerlo directamente en las variables x,y porque la región es difícil de describir en esas variables.

Sin embargo, si usamos coordenadas (r,θ) donde

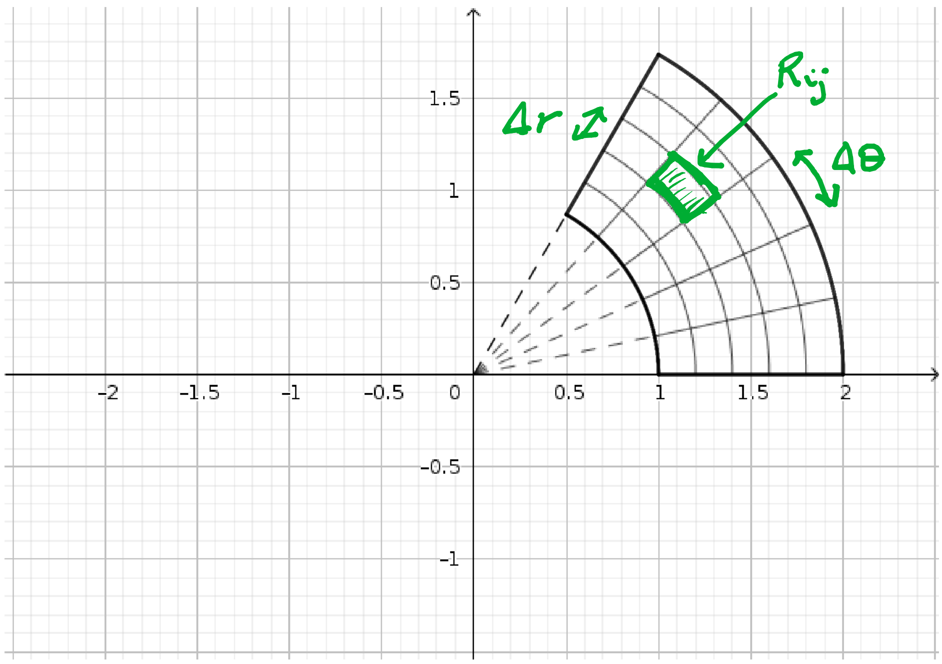


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

esa región se describe fácilmente, pues es un rectángulo

$$Q = \{(r,\theta) : 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \alpha\}$$

Estas coordenadas se llaman coordenadas polares. Para integrar usando coordenadas polares tenemos que hacer la subdivisión en rectángulos en esas coordenadas:



$$\text{área}(R_{ij}) = \frac{1}{2}\Delta r^2 \Delta\theta$$

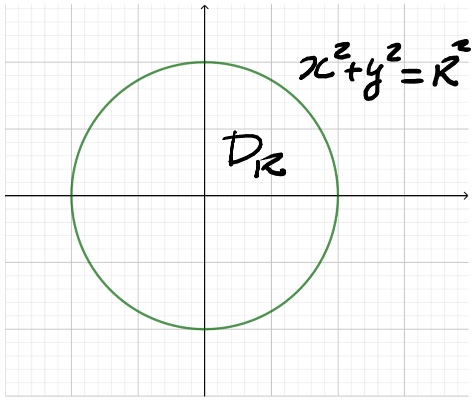
$$\approx r_i \Delta r \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \int_Q f(x,y)\,dx\,dy = \lim \sum_{ij} f(r_i\cos\theta_j, r_i\,\text{sen}\,\theta_j)\, r_i \Delta r \Delta\theta$$

Fórmula de cambio a coordenadas polares $= \int_Q f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$

Ejemplos.

1) Área del círculo de radio R.



$$\text{área}(D_R) = \int_{D_R} dx\,dy \underset{\uparrow}{=} \int_{D_R} r\,dr\,d\theta$$

cambio a polares

D_R en polares:

$$D_R = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq R^2\} = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$\Rightarrow \int_{D_R} r\,dr\,d\theta = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} r\,d\theta = 2\pi \int_0^R r\,dr = \cancel{2}\pi \frac{r^2}{\cancel{2}}\Big|_0^R$$

$$= \boxed{\pi R^2}$$

2) Volumen entre el plano $z=0$ y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

$$V = \int_D (1-x^2-y^2)\,dx\,dy \underset{\uparrow}{=} \int_D (1-r^2)\,r\,dr\,d\theta =$$

D: círculo de radio 1

cambiamos a polares

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr = 2\pi\left(\frac{r^2}{2} \quad \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Si escribimos la integral en coordenadas cartesianas nos queda

$$V = \int_D (1-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)\,dy =$$

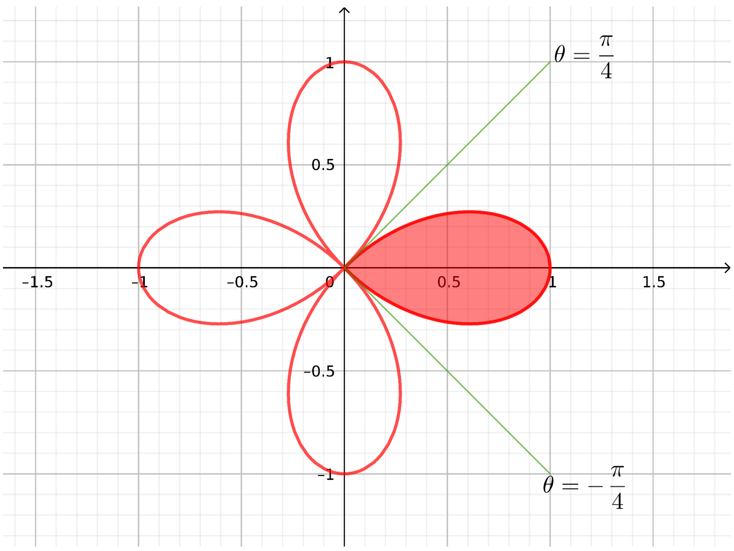
$$= \int_0^1 (1-x^2)y - \frac{y^3}{3} \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^1 2(1-x^2)\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{3/2} dx$$

¡No muy linda!

3) Calcular el área de un pétalo de la flor $r = \cos(2\theta)$.



$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_0^{\cos(2\theta)} r\,dr = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2}\cos^2(2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2(2\theta)\,d\theta$$

Una primitiva de $\cos^2 x$ es $\frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x)$

$\Rightarrow$ una primitiva de $\cos^2(2\theta)$ es $\frac{1}{4}(2\theta + \operatorname{sen}(2\theta)\cos(2\theta))$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\Big[2\theta + \operatorname{sen}(2\theta)\cos(2\theta)\Big]\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{área del pétalo} = \frac{\pi}{8}}$$

Fin