

Gas ideal de fermiones. (Kittel y Kroemer, cap. 7)**Ejemplos**

1. Electrones de conducción en un metal

Modelo de Drude-Lorentz

Cargas móviles en un metal conforman un gas ideal.

La carga de la red cristalina cancela la de las cargas móviles, entonces no es totalmente absurdo despreciar a las interacciones entre las cargas móviles.

El modelo clásico tiene algún éxito cualitativo, pero mejora bastante si se trata a las cargas móviles como un gas ideal *cuántico* de fermiones. Resulta que en temperatura ambiente este gas está bien representado por el límite de temperatura cero. Esto es el límite “degenerado”, el opuesto al límite clásico que aplica en temperaturas altas. En el límite degenerado el gas está en su estado fundamental, o en los más bajos, y su comportamiento es dominado por efectos cuánticos, efectos térmicos siendo secundarios.

Es fácil ver que la concentración de electrones móviles n_{el} es muy mayor que su concentración cuántica n_{elQ} en temperatura ambiente: Esta temperatura es muy por debajo de la temperatura de ionización de los átomos del metal. Un diámetro atómico es de orden de la longitud de de Broglie correspondiente al momento del electrón menos ligado, que es la longitud de Broglie correspondiente a la energía de ionización. Entonces la longitud de de Broglie térmica, λ_T es mucho más grande que el diámetro de un átomo, que a su vez es parecido al espaciado, a , entre los átomos en el cristal. Hay aproximadamente una carga móvil por átomo. Así el volumen cuántico, $\simeq \lambda_T^3$, es mucho mayor que el volumen por carga móvil, $\simeq a^3$. Es decir $n_{el} \gg n_{elQ}$. Esto indica que el sistema está lejos del régimen clásico.

Para realmente hacer funcionar al modelo con electrones (y huecos) como cargas móviles hay que dar a estos masas efectivas que no son iguales a la masa de un electrón en vacío.

Aun así las interacciones de las cargas móviles con la red cristalina son importantes para muchos fenómenos.

2. Estrella enana blanca

Una estrella colapsada porque no tiene suficiente temperatura para que haya fusión nuclear de los elementos que hay en ella.

Por la enorme presión los átomos se desarmen y todos los electrones y núcleos son móviles, formando fluidos que se pueden aproximar como gases ideales.

Los electrones forman un gas de fermiones degenerado mientras los núcleos forman un gas clásico, es decir no degenerado, ya que al ser bastante masivos el gas de núcleos tiene un volumen cuántico muy chico.

La presión de degeneración de los electrones – la presión que tiene un gas de fermiones aun en temperatura $T=0$ – sostiene a la estrella.

Nota que, aunque la enana blanca es demasiado fría para sostener fusión nuclear de los elementos presentes y la contribución térmica a la presión es menor que la de degeneración, la temperatura de la estrella es todavía bastante alta. Inicialmente es de orden $10^7 K$ y luego se enfría muy lentamente (por tener una superficie chica y por otros motivos). Parece ser respaldado por observaciones que después de enfriar bastante empieza a cristalizar.

3. Estrellas de neutrones.

Si la masa de una estrella “fría” es mayor al llamado limite de Chandrasekhar entonces presión de degeneración de los electrones no alcanza para sostenerla y colapsa hasta que la presión es tan grande que los protones se tragan a los electrones y los núcleos se juntan en un gas de neutrones. La presión de degeneración de estos fermiones entonces sostienen a la estrella de neutrones.

La teoría que desarrollaremos aquí aplica solo mas o menos. Realmente los neutrones son relativistas en una estrella de neutrones. Ademas no se sabe bien como se comportan neutrones a estas densidades (mayores que los de núcleos). Incluso es bien posible que en el interior de estrellas de neutrones haya no neutrones pero un plasma de quarks y gluones.

Si la masa de la estrella es mayor aun puede ser que o, nada puede sostener a la estrella y entonces sigue colapsando formando un agujero negro, o algún otro estado exótica de la materia puede formar un cuerpo estable de aun mayor masa o densidad que una estrella de neutrones. Agujeros negros son bien atestadas en la Naturaleza. Hay candidatos para ser objetos compactos exóticos pero nada comprobado.

Gas de fermiones en temperatura $T=0$

Esto es el caso relevante para los ejemplos.

La ocupación de un orbital i es $f_i = \langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1}$

Si $T \rightarrow 0$ entonces $\beta \rightarrow \infty$ y, si $\epsilon_i > \mu$, $e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \rightarrow \infty$ y $f_i \rightarrow 0$,
 si $\epsilon_i < \mu$, $e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \rightarrow 0$ y $f_i \rightarrow 1$.

DIBUJO Grafica de f vs. ϵ para $T=0$.

Todos los orbitales con energía hasta μ están llenos y todos que tienen energía mayor que μ están vacíos.

Como un vaso de agua que se llena hasta cierto nivel.

El número de partículas N es igual al número de orbitales con energía $\epsilon_i < \mu$, $N(\mu)$. Así el número de partículas fija el potencial químico.

El potencial químico por un número de partículas dado en temperatura $T=0$ se llama la “energía de Fermi” y se escribe ϵ_F .

El gas está en su estado fundamental. Sin embargo el Principio de Exclusión requiere que, cuando hay muchas partículas, orbitales hasta energías bastante altas deben estar llenos. Por lo tanto gases de fermiones pueden tener una alta presión aun en $T=0$. Esta presión se llama “presión de degeneración”.

Hagamos estas ideas cuantitativas:

Número de orbitales

Consideramos un gas en un recipiente de volumen V en 3 dimensiones. Supongamos que no hayan fuerzas externas, salvo por la repulsión de las paredes, y que el gas es no-relativista.

El número de orbitales, es decir, el número de estados estacionarios de una sola partícula, de energía menor a ϵ es

$$N(\epsilon) = \gamma \times \frac{(\text{Volumen de espacio de fases de una sola partícula con energía menor a } \epsilon)}{h^3}$$

con γ el número de estados internos de la partícula.

El espacio de fases de una partícula es la del centro de masa solo. No están representados grados de libertad internos si los hay.

Se supone aquí que la energía no depende del estado interno. Por ejemplo, si el campo magnético es cero entonces electrones tienen $\gamma=2$ por sus dos estados de espín. Para partículas de espín s en ausencia de campos acoplados con el momento angular de espín $\gamma=2s+1$, salvo si son de masa cero. Si son de masa cero, como fotones, entonces $\gamma=2$. Este factor de 2, por polarización, ya vimos cuando contamos los modos del campo EM en una cavidad.

Entonces

$$N(\epsilon) = \gamma \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{2m\epsilon}}{h} \right)^3 V = \frac{4\pi}{3} \gamma V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \epsilon^{3/2}.$$

Esto vale para todo tipo de partícula – fermiones, bosones, distinguibles pero equivalentes.

Solo falla para ϵ y/o V tan chico que $N(\epsilon) \simeq 1$. En este último caso no se puede usar el volumen en el espacio de fases clásico. Hay que resolver la ecuación de

Schroedinger para encontrar a los orbitales (o las ecuaciones del campo para encontrar a sus modos).

La densidad, en energía, de orbitales es

$$D(\varepsilon) = \frac{dN}{d\varepsilon} = 2\pi \gamma V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} n_Q V \varepsilon^{1/2} = C \varepsilon^{1/2}$$

DIBUJO Grafica de $D(\varepsilon)$

En general el numero de partículas es $N = \int f D d\varepsilon$
y la energía total es $E = \int \varepsilon f D d\varepsilon$.

Volvemos al gas de fermiones en $T=0$

Recuerden que $f(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon < \mu = \varepsilon_F \\ 0 & \text{si } \varepsilon > \mu \end{cases}$.

Entonces $N = \int_0^{\varepsilon_F} D d\varepsilon = N(\varepsilon_F) = \frac{2}{3} C \varepsilon_F^{3/2}$ y $E = \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon D d\varepsilon = \frac{2}{5} C \varepsilon_F^{5/2} = \frac{3}{5} N \varepsilon_F$.

Definición Temperatura de Fermi: $\varepsilon_F = k_B T_F$.

Entonces $E = \frac{3}{5} N k_B T_F = \frac{3}{2} N k_B \left(\frac{2}{5} T_F \right)$

La energía (que es puramente cinética) es la de un gas ideal monatómico clásico con temperatura $\frac{2}{5} T_F$.

Tendría que tener presión como un gas clásico con $T = \frac{2}{5} T_F$.

Así es:

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T=0, N} = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{T=0, N} \quad \text{porque en } T=0 \quad F \equiv E - TS = E$$

Tenemos una expresión para E en términos de N y ε_F . Podemos expresar ε_F en términos de N y V .

$$N = N(\varepsilon_F) = \frac{4\pi}{3} \gamma V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \varepsilon_F^{3/2}$$

Entonces $\epsilon_F \propto \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$ y $E = \frac{3}{5} N \epsilon_F \propto \frac{N^{5/3}}{V^{2/3}}$.

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{T=0, N} = -\frac{E}{V} \left(\frac{\partial \ln E}{\partial \ln V}\right)_{T=0, N} = \frac{2}{3} \frac{E}{V} = \frac{2}{5} \frac{N}{V} \epsilon_F$$

Así

$$PV = N k_B \frac{2}{5} T_F \text{ .}$$

Como dijimos, tiene presión como un gas clásico con $T = \frac{2}{5} T_F$.

Ejemplo: Los electrones de conducción en cobre

Hay aproximadamente un electrón de conducción por átomo. Vamos a modelar los como un gas ideal fermiónico.

$$n = \frac{N}{V} = 8,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \text{ , } \gamma = 2 \text{ porque son de espín } 1/2 \text{ .}$$

$$\epsilon_F^{3/2} = n \frac{3}{8\pi} \left(\frac{h^2}{2m}\right)^{3/2} \text{ entonces}$$

$$\epsilon_F = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m} n^{2/3} = 0,242 \frac{(6,63 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{2 \times (9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})} (8,5 \times 10^{28})^{2/3} \text{ m}^{-2} = 1,1 \times 10^{-18} \text{ J} = 7,0 \text{ eV}$$

(porque $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$).

Hemos usado la masa en vacío (o masa real) del electrón en lugar de su masa efectiva en cobre. Pero en cobre la masa efectiva es muy cerca a la masa en vacío – es 1,01 veces la masa en vacío.

$$\text{Entonces } T_F = \epsilon_F / k_B = \frac{1,1 \times 10^{-18} \text{ J}}{1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}} = 8,0 \times 10^4 \text{ K} \text{ .}$$

El gas de electrones de conducción tiene energía y presión de un gas clásico muy caliente - de temperatura $T = 3,2 \times 10^4 \text{ K}$ - y muy denso.

No te quemas al tocarlo porque los electrones no te pueden dar su energía cinética. El gas esta casi en su estado fundamental.

Pero la presión de degeneración,

$$P = \frac{N}{V} k_B \frac{2}{5} T_F = \frac{2}{5} n \epsilon_F = \frac{2}{5} \times (8,5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}) \times (1,1 \times 10^{-18} \text{ J}) = 3,7 \times 10^{10} \text{ Pa} = 3,7 \times 10^5 \text{ atm}$$

contribuye a la dureza del material cuando se intenta comprimirlo. Lo mantiene inflado como una pelota con muchísima presión. (Pero la red cristalina contribuye algo más a la dureza – el módulo de compresibilidad.)

Calculo de presión de degeneración a partir de suma de Gibbs

Parece casi trampa como calculamos la presión. Aquí hay otra manera de hacerlo. La suma de Gibbs para el gas es el producto de las sumas de Gibbs de los orbitales. Así el logaritmo es la suma de los logaritmos sobre los orbitales:

$$\ln \Xi = \int_0^\infty \ln(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon)}) D(\varepsilon) d\varepsilon$$

Para $\varepsilon > \mu$, $e^{\beta(\mu - \varepsilon)} \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow 0$. Entonces $\ln(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon)}) \sim e^{\beta(\mu - \varepsilon)}$

Para $\varepsilon < \mu$ $\ln(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon)}) = \ln 2$

DIBUJO

Entonces $\int_\mu^\infty \ln(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon)}) D(\varepsilon) d\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow 0$ (con μ constante).

Para $\varepsilon < \mu$ $\ln(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon)}) = \ln(e^{\beta(\mu - \varepsilon)} [1 + e^{-\beta(\mu - \varepsilon)}]) \sim \beta(\mu - \varepsilon) + e^{-\beta(\mu - \varepsilon)}$, así

$$k_B T \int_0^\mu \ln(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon)}) D(\varepsilon) d\varepsilon \rightarrow \int_0^\mu (\mu - \varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon = \mu N(\mu, 0) - E(\mu, 0)$$

donde $N(\mu, 0)$ es el número de partículas en temperatura cero y potencial químico μ , y $E(\mu, 0)$ es la energía del gas en las mismas condiciones. Si fijamos el número de partículas $N(\mu, 0) = N$ entonces el potencial debe ser la energía de Fermi correspondiente a este N : $\mu = \varepsilon_F$. Ya hemos visto que para un gas tridimensional, no-relativista sin potencial externo la correspondiente energía es $\frac{3}{5} N \varepsilon_F$.

El gran potencial es entonces

$$\Phi = -k_B T \ln \Xi \rightarrow E - N \varepsilon_F = \frac{3}{5} N \varepsilon_F - N \varepsilon_F = -\frac{2}{5} N \varepsilon_F$$

Entonces $PV = -\Phi = \frac{2}{5} N \varepsilon_F = \frac{2}{5} N k_B T_F$. Hemos recuperado la misma expresión como antes para la presión de degeneración.

Condensación de Bose-Einstein

Debajo de cierta temperatura T_E la fracción de partículas que están en el orbital de menor energía es no cero en el límite de un recipiente de volumen infinito. Por ejemplo,

20% están en el orbital fundamental, 80% en todos los demás orbitales.

(T_E se llama “la temperatura de Einstein”, pero no es la misma que en su modelo de capacidad calorífica de sólidos.)

Encima de esta temperatura $n_0/N \rightarrow 0$ cuando $V \rightarrow \infty$, donde n_0 es el numero de partículas en el orbital fundamental, 0, y N el numero total.

DIBUJO Grafica de n_0/N vs. T

Es una transición de fase ¡sin que haya interacción entre las partículas!

Históricamente la transición de He⁴ liquido a superfluidez ha sido identificada como una condensación Bose-Einstein (véase Kittel y Kroemer p. 207 – 217) aunque helio dista mucho de ser un gas ideal. Los átomos tienen una interacción importante. Así la teoría desarrollada aquí no se puede aplicar directamente.

En 1995 se observaron ejemplos limpios de condensación BE (BEC) en gases ideales – gases de átomos atrapados en trampas magneto-ópticas con concentraciones y temperaturas muy, muy bajas.

¿Como funciona?

La ocupación de un orbital i es $f_i = \langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}$

Recuerda que para que esto sea un numero no-negativo para cada orbital, como debe ser, es necesario que μ sea menor que la energía ϵ_0 del orbital de menor energía, el orbital 0.

Ahora ¿que pasa cuando bajamos la temperatura y mantenemos constante μ ?

Si T baja entonces β aumenta y, porque $\epsilon_i - \mu > 0$, $e^{\beta(\epsilon_i - \mu)}$ aumenta y f_i baja. El numero total de partículas en el gas baja.

Aumentar μ con temperatura constante tiene el efecto opuesto: $\epsilon_i - \mu$ baja, así $e^{\beta(\epsilon_i - \mu)}$ baja y f_i aumenta.

La ocupación del orbital mas bajo, $f_0 = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1}$, aumenta sin limite cuando μ se acerca a ϵ_0 desde abajo: $f_0 \rightarrow \infty$ cuando $\mu \rightarrow \epsilon_0$.

La ocupación de los demás orbitales tienen un tope. Aumentan hasta un valor máximo finito $f_{imax} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \epsilon_0)} - 1} < \infty$ alcanzado cuando $\mu = \epsilon_0$.

Incluso la ocupación de *todos* los orbitales de energía mayor que ϵ_0 juntos tiene un tope. Para un recipiente grande el numero de partículas en estos orbitales, que llamamos “excitados”, es menor que

$$N_e = \int_{\epsilon_0}^{\infty} f_{max} D d\epsilon$$

donde $D = 2\pi \gamma V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \epsilon^{1/2} = C \epsilon^{1/2}$ es la densidad de orbitales en energía.

$$\text{Entonces } N_e = \int_{\epsilon_0}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\epsilon_0)} - 1} C \epsilon^{1/2} d\epsilon = \frac{C}{\beta^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} (x + \beta\epsilon_0)^{1/2} dx$$

$\frac{C}{\beta^{3/2}} = 2\pi \gamma V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (k_B T)^{3/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma n_Q V$ entonces la máxima concentración de partículas en orbitales excitadas es

$$n_e = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma n_Q \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} (x + \beta\epsilon_0)^{1/2} dx .$$

Cuando el volumen del recipiente tiende a infinito $\epsilon_0 \rightarrow 0$. Así, para recipientes grandes

$$n_e = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma n_Q \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} x^{1/2} dx = 2 \gamma n_Q \times 1,306$$

y el numero de partículas que caben en los orbitales excitados es

$$N_e = 2 \times 1,306 \gamma n_Q V = 2 \times 1,306 \gamma \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2} V$$

Ahora considera un gas con un numero N dado de partículas Si la temperatura es suficientemente alta $N_e > N$, y las partículas podrían todos estar en los orbitales excitados, o algunos allí y otros en el orbital fundamental 0.

Pero en temperaturas suficientemente bajas $N_e < N$, lo cual implica que las partículas no caben todos en los orbitales excitados. Al menos $N - N_e$ de ellos deben estar en el orbital fundamental.

La temperatura de Einstein T_E es la temperatura en que $N = N_e$.

$$T_E = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left(\frac{n}{2 \times 1,306 \gamma}\right)^{2/3}$$

$$N_e = N \left(\frac{T}{T_E}\right)^{3/2}$$

y el número mínimo de partículas en el orbital fundamental es

$$N_0 = N - N_e = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_E} \right)^{3/2} \right].$$

Por ejemplo, si la temperatura es $T = 1/4 T_E$ al menos $100\% \times \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{3/2} \right) = 87,5\%$

de las partículas deben estar estrictamente en el orbital fundamental. Aun si el recipiente es muy grande y los primeros orbitales excitados tienen una energía muy, muy poco mayor que el fundamental.

Hemos hablado solo de cotas superiores e inferiores, pero para un sistema grande - de volumen y número de partículas grande - las cotas N_e y N_0 son realmente el número de partículas en los orbitales excitados y en el orbital fundamental respectivamente:

El motivo fundamental es que para un gas de muchas partículas a temperatura $T < T_E$ el potencial químico μ debe estar mucho más cerca a ϵ_0 , la energía del orbital fundamental, que ϵ_0 es a ϵ_1 , la energía del primer nivel excitado.

DIBUJO μ , ϵ_0 , ϵ_1 dibujados como niveles de energía.

¿Porque?

Supongamos que $T < T_E$ y que entonces $N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_E} \right)^{3/2} \right]$ es un número muy grande si N lo es.

Sabemos que $f_0 = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1} > N_0$. Entonces $e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} < 1 + \frac{1}{N_0}$

$$\Rightarrow \beta(\epsilon_0 - \mu) < \frac{1}{N_0}$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 - \mu < \frac{\tau}{N_0} = \frac{k_B T}{n \left[1 - \left(\frac{T}{T_E} \right)^{3/2} \right]} \frac{1}{V} = \frac{h^2}{2m} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2 \gamma \times 1,306} \right)^{2/3} \frac{\alpha}{1 - \alpha^{3/2}} \frac{1}{n^{1/3}} \frac{1}{V}$$

con $\alpha = T/T_E$.

Mientras tanto, en un cubo de lado L

$$\epsilon_1 - \epsilon_0 = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2L} \right)^2 [(1^2 + 1^2 + 4^2) - (1^2 + 1^2 + 1^2)] = \frac{3}{2m} \left(\frac{h}{2L} \right)^2$$

Si mantenemos a las cantidades intensivas n y T constantes entonces $\epsilon_0 - \mu$ va como $1/L^3$ mientras $\epsilon_1 - \epsilon_0$ va como $1/L^2$. Cuando el volumen es suficientemente grande $\epsilon_1 - \epsilon_0 \gg \epsilon_0 - \mu$.

Ponemos números típicos: $\frac{\varepsilon_0 - \mu}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} < \frac{4}{3} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2 \gamma \times 1,306} \right)^{2/3} \frac{\alpha}{1 - \alpha^{3/2}} \frac{1}{n^{1/3}} \frac{1}{L}$. Si ponemos $\gamma=1$, $\alpha=0,99$ - temperatura solo 1% menos que T_E , y $n=10^{15} \text{ cm}^{-3}$ - un valor típico para los primeros condensados en trampas magneto-ópticas. Entonces

$$\frac{\varepsilon_0 - \mu}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} < \frac{1,48 \times 10^{-4} \text{ cm}}{L}$$

Ahora bien $f_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \varepsilon_0)} e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1} = e^{-\beta(\varepsilon_0 - \mu)} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \varepsilon_0)} - e^{-\beta(\varepsilon_0 - \mu)}}$. Así

$$f_i > \left(1 - \frac{1}{N_0} \right) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \varepsilon_0)} - 1 + 1/N_0} = \left(1 - \frac{1}{N_0} \right) \frac{1}{1/f_{i_{max}} + 1/N_0} = \left(1 - \frac{1}{N_0} \right) \frac{N_0}{N_0 + f_{i_{max}}} f_{i_{max}} = \frac{N_0 - 1}{N_0 + f_{i_{max}}} f_{i_{max}}$$

Entonces $f_i > \frac{N_0 - 1}{N_0 + f_{i_{max}}} f_{i_{max}}$, porque