Matemática 2 - módulo II **Universidad de la República**
Curso 2022 **Facultad de Ciencias**
Centro de Matemática

Nombre:	**C.I.:**

Módulo 2 – Segundo parcial.

Ejercicio 1. [10+5+10 = 25 puntos] Sea $f(x,y) = x^3 - xy$.

a) Hallar los puntos estacionarios de f.

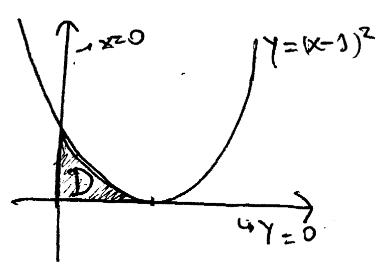
b) Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ la región delimitada por las siguientes curvas $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ y $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = (x-1)^2\}$. Dibujar la región D.

c) Determinar los extremos absolutos de f en D.

Solución:

a) Se tiene $f_x(x,y) = 3x^2 - y$, $f_y(x,y) = -x$, por lo que el único punto estacionario es $(0,0)$.

b)



c) La función f no tiene puntos críticos en el interior de D, por lo que sus extremos se alcanzan en el borde de D. Tenemos

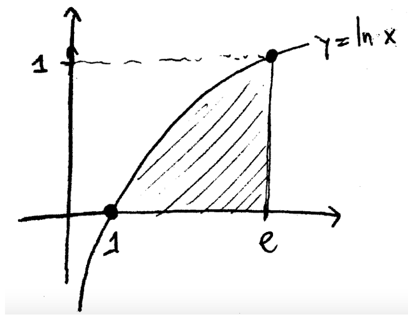
- $f(x,0) = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, que tiene máximo en $x = 1$, $f(1,0) = 1$, y mínimo en $x = 0$, $f(0,0) = 0$;
- $f(0,y) = 0$, $0 \leq y \leq 1$, que tiene máximo y mínimo igual a 0;
- $f(x,(x-1)^2) = 2x^2 - x$, $0 \leq x \leq 1$, que tiene máximo en $x = 1$, $f(1,0) = 1$, y mínimo en $x = 1/4$, $f(1/4, 9/16) = -1/8$.

Por lo tanto, el máximo absoluto de f en D es 1 y el mínimo absoluto es $-1/8$.

Ejercicio 2. [15 puntos] La integral iterada que sigue corresponde a la integral doble de una función f en un cierto conjunto. Dibujar ese conjunto y expresar la integral iterada en el orden inverso de integración:

$$\int_1^e \left(\int_0^{\ln(x)} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Solución: el conjunto es como en la figura:



Por lo tanto, es

$$\int_1^e \left(\int_0^{\ln(x)} f(x,y)\ dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{e^y}^{e} f(x,y)\ dx \right) dy.$$

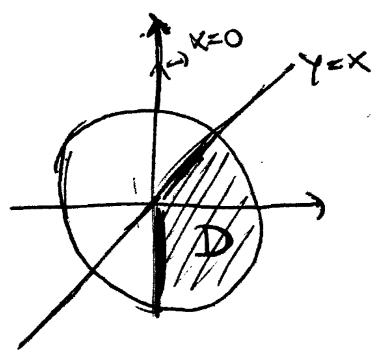
Ejercicio 3. [5+15 = 20 puntos]

a) Dibujar el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x > 0,\ y < x,\ x^2 + y^2 < 1\}$.

b) Calcular $\iint_D x + y\ dx\, dy$.

Solución:

a) El conjunto D es como en la figura



b) Haciendo un cambio a coordenadas polares, tenemos

$$\iint_D x + y\ dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \rho^2(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) d\theta \right) d\rho + \int_0^1 \left(\int_{3\pi/2}^{2\pi} \rho^2(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) d\theta \right) d\rho.$$

Como $\int \rho^2 d\rho = \frac{\rho^3}{3}$ y $\int (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) d\theta = -\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$, se tiene

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \rho^2(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) d\theta \right) d\rho = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 \left(\int_{3\pi/2}^{2\pi} \rho^2(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) d\theta \right) d\rho = 0.$$

Tabla de primitivas

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^α, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
e^x	e^x
$\ln x$	$x \ln x - x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$-\ln \cos \|x\|$

Algunos valores de funciones trigonométricas

θ	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0