Ejercicio 1

Teorema (Wedderburn-Artin para $\mathbb{K}$-álgebras). Sea R una $\mathbb{K}$-álgebra semisimple a izquierda de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, siendo D_i $\mathbb{K}$-álgebras con división de dimensión finita. Entonces $R \simeq \prod_{i=1}^{n} M_{k_i}(D_i)$ como $\mathbb{K}$-álgebras. Además, si $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, tenemos $D_i = \mathbb{K}$

Demostración: Vamos a copiar la prueba para un anillo semisimple, pero viendo que los morfismos que usamos son morfismos de $\mathbb{K}$-álgebras.

Primero vamos a descomponer a R como suma directa de ideales a izquierda. Podemos agrupar a los que son isomorfos entre sí y nos queda

$$R \simeq \bigoplus_{i \in I} V_i^{k_i}$$

Veamos que la suma es finita. Tenemos $1 = \sum_{i \in I} v_i$, con $v_i \in V_i^{k_i}$. Notar que únicamente finitos v_i son no nulos. Luego $r = r1 = r \sum_{i \in I} v_i = \sum_{i \in I} r v_i$, así que al final para escribir cualquier r precisamos elementos de una cantidad finita de $V_i^{k_i}$. Por lo tanto podemos escribir

$$R \simeq \bigoplus_{i \in 1}^{n} V_i^{k_i}$$

Ahora vamos a probar $R \simeq (End(R))^{op}$. Si $\varphi \in (End(R))^{op}$, vale $\varphi(r) = \varphi(r1) = r\varphi(1)$. Esto nos motiva a definir la correspondencia $\varepsilon_1(\varphi) = \varphi(1)$. Recién vimos que lo único que importa en el morfismo es a qué lugar va a parar el 1, así que la biyectividad es clara. Veamos que ε_1 es un morfismo:

$$\varepsilon_1(\varphi \cdot \psi) = \varepsilon_1(\psi \circ \varphi) = (\psi \circ \varphi)(1) = \psi(\varphi(1)) = \varphi(1)\psi(1) = \varepsilon_1(\varphi)\varepsilon_1(\psi)$$

Resta ver que es de $\mathbb{K}$-álgebras. Primero notar que $End(R)^{op}$ es una $\mathbb{K}$-álgebra porque podemos pensar a $\mathbb{K}$ encajado en $Z(End(R)^{op})$ como $\lambda \longmapsto (\lambda \cdot 1)Id_R$. Luego tenemos $\varepsilon_1(\lambda\varphi) = (\lambda\varphi)(1) = \lambda(\varphi(1))$.

La idea ahora es ver que $End(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i^{k_i}) \simeq \prod_{i=1}^{n} End(V_i^{k_i})$ y luego probar $End(V_i^{k_i}) \simeq M_{k_i}(End(V_i))$. Con esto ya casi podemos concluir, pues sabemos que $End(V_i)$ es un anillo con división gracias al Lema de Schur. Por lo tanto es una $\mathbb{K}$-álgebra con divisisón pensando a $\mathbb{K}$ en $Z(End(V_i))$ como $\lambda \longmapsto (\lambda \cdot 1)Id_{V_i}$. Además es de dimensión finita porque $V_i \simeq End(V_i)^{op}$.

Probemos $End(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i^{k_i}) \simeq \prod_{i=1}^{n} End(V_i^{k_i})$. Vamos a definir una correspondencia desde cada lado, probar que son inversas y que una de ellas es morfismo. Algo que vamos a usar constantemente es que la suma directa y el producto coinciden cuando es finito. Primero consideremos

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus V_i^{k_i} \arrow[r, "\varphi"] & \bigoplus V_i^{k_i} \arrow[d, "\pi_j"] \\
V_i^{k_i} \arrow[u, hook, "\iota_i"] & V_j^{k_j}
\end{tikzcd}$$

Notar que si $i \neq j$, tiene que ser $\pi_j \circ \varphi \circ \iota_i = 0$ por el lema de Schur. Esto nos motiva a definir una de las correspondencias.

$$\Phi : End\left(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i^{k_i}\right) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} End(V_i^{k_i})$$

$$\varphi \longmapsto (\pi_i \circ \varphi \circ \iota_i)_i$$

Por otro lado, si tenemos $(\varphi_i)_i \in End\left(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i^{k_i}\right)$, usando la propiedad universal de la suma directa tenemos una única $\widehat{\varphi}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus V_i^{k_i} \arrow[r, dashed, "\widehat{\varphi}"] & \bigoplus V_i^{k_i} \\
V_i^{k_i} \arrow[u, hook, "\iota_i"] \arrow[r, "\varphi_i"'] & V_i^{k_i} \arrow[u, "\iota_i"']
\end{tikzcd}$$

Por esto consideramos la correspondencia

$$\Psi : \prod_{i=1}^{n} End(V_i^{k_i}) \longrightarrow End\left(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i^{k_i}\right)$$

$$(\varphi)_i \longmapsto \widehat{\varphi}$$

Ya tenemos las correspondencias, veamos que son inversas.

$$(\Phi \circ \Psi)((\varphi_i)_i) = \Phi(\widehat{\varphi}) = (\pi_i \circ \widehat{\varphi} \circ \iota_i)_i = (\pi_i \circ (\widehat{\varphi} \circ \iota_i))_i = (\pi_i \circ (\iota_i \circ \varphi_i))_i = (\varphi_i)_i$$

.

Anotemos $\pi_i \circ \varphi \circ \iota_i = \eta_i$. Luego

$$(\Psi \circ \Phi)(\varphi) = \Psi(\pi_i \circ \varphi \circ \iota_i)_i) = (\eta_i)_i = \widehat{\eta}$$

siendo $\widehat{\eta}$ el único morfismo que satisface $\widehat{\eta} \circ \iota_i = \iota_i \circ \eta$. Veamos que φ también lo cumple.

$$\iota_i \circ \eta = \iota_i \circ \pi_i \circ \varphi \circ \iota_i = \varphi \circ \iota_i$$

en donde en la última igualdad usamos que la imagen de $\varphi \circ \iota_i$ cae en $V_i^{k_i}$, que es por el lema de Schur.

Teniendo esto, ahora veamos que Ψ es morfismo. Queremos que valga $\widehat{\psi \circ \varphi} = \widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}$. O sea, que $\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi} \circ \iota_i = \iota_i \circ \psi_i \circ \varphi_i$.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus V_i^{k_i} \arrow[r, dashed, "\widehat{\varphi}"] & \bigoplus V_i^{k_i} \arrow[r, dashed, "\widehat{\psi}"] & \bigoplus V_i^{k_i} \\
V_i^{k_i} \arrow[u, hook, "\iota_i"] \arrow[r, "\varphi_i"'] & V_i^{k_i} \arrow[u, "\iota_i"'] \arrow[r, "\psi_i"'] & V_i^{k_i} \arrow[u, "\iota_i"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bigoplus V_i^{k_i} \arrow[r, dashed, "\widehat{\psi \circ \varphi}"] & \bigoplus V_i^{k_i} \\
V_i^{k_i} \arrow[u, hook, "\iota_i"] \arrow[r, "\psi_i \circ \varphi_i"'] & V_i^{k_i} \arrow[u, "\iota_i"']
\end{tikzcd}$$

Mirando los diagramas tenemos $\widehat{\psi} \circ (\widehat{\varphi} \circ \iota_i) = (\widehat{\psi} \circ \iota_i) \circ \varphi_i = \iota_i \circ \psi_i \circ \varphi_i$

Ahora veamos que se porta bien con la suma. Queremos $\widehat{\varphi+\psi}=\widehat{\varphi}+\widehat{\psi}$. Esto sale de que

$$\iota_i\circ(\varphi_i+\psi_i)=\iota_i\circ\varphi_i+\iota_i\circ\psi_i=\widehat{\varphi}\circ\iota_i+\widehat{\psi}\circ\iota_i=(\widehat{\varphi}+\widehat{\psi})\circ\iota_i$$

Por último, probemos que es un $\mathbb{K}$ morfismo. i.e $\widehat{\lambda\varphi}=\lambda\widehat{\varphi}$. Para ello notamos que

$$\iota_i\circ(\lambda\varphi_i)=\lambda(\iota_i\circ\varphi_i)=\lambda(\widehat{\varphi}\circ\iota_i)=(\lambda\widehat{\varphi})\circ\iota_i$$

Aún nos resta probar el otro isomorfismo que comentamos: $End(V_i^{k_i})\simeq M_{k_i}(End(V_i))$. Para no sobrecargar la notación, vamos a escribir $k=k_i$ y $W=V_i$. Además llamaremos W_i a la i-ésima coordenada de W^k.

Consideramos las correspondencias

$$\Psi: End(W^k)\longrightarrow M_k(End(W))$$
$$\varphi\longmapsto(\pi_i\circ\varphi\circ\iota_j)_{ij}$$

$$\Phi: M_k(End(W))\longrightarrow End(W^k)$$
$$(\varphi)_{ij}\longmapsto\widehat{\varphi}$$

siendo $\widehat{\varphi}$ el morfismo que sale del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W^k \arrow[r, dashed, "\widehat{\varphi}"] \arrow[dr, dashed, "\widehat{\varphi_i}"] & W^k \arrow[d, "\pi_i"] \\
W_j \arrow[u, "\iota_j"] \arrow[r, "\varphi_{ij}"'] & W_i
\end{tikzcd}$$

El morfismo $\widehat{\varphi_i}$ lo obtenemos de la propiedad universal de la suma directa, mientras que $\widehat{\varphi}$ sale de la propiedad universal del producto.

Probemos que efectivamente son inversas. Por un lado tenemos

$$(\Phi\circ\Psi)(\varphi)=\Phi((\pi_i\circ\varphi\circ\iota_j)_{ij})=\Phi((\varphi_{ij})_{ij})=\widehat{\varphi}$$

$\widehat{\varphi}$ es el morfismo que cumple $\pi_i\circ\widehat{\varphi}=\widehat{\varphi}_i$, siendo $\widehat{\varphi}_i$ el que satisface $\widehat{\varphi}_i\circ\iota_j=\varphi_{ij}$. Como $(\pi_i\circ\varphi\circ\iota_j)=(\varphi_{ij})$, tiene que ser $\widehat{\varphi}_i=\pi_i\circ\varphi$. Luego la condición que define a $\widehat{\varphi}$ es $\pi_i\circ\widehat{\varphi}=\pi_i\circ\varphi$. Sin embargo, si cambiamos $\widehat{\varphi}$ por φ esto también se cumple, así que $\varphi=\widehat{\varphi}$. Por otro lado

$$(\Psi\circ\Phi)((\varphi_{ij})_{ij})=\Psi(\widehat{\varphi})=(\pi_i\circ\widehat{\varphi}\circ\iota_j)_{ij}$$

Por construcción tenemos $(\pi_i\circ\widehat{\varphi})\circ\iota_j=\widehat{\varphi}_i\circ\iota_j=\varphi_{ij}$. Así que efectivamente son inversas. Vamos a probar que Ψ es morfismo. Que se porta bien con la suma es claro pues la operación es coordenada a coordenada.

Precisamos probar que $\Psi(\varphi\circ\psi)=\Psi(\varphi)\Psi(\psi)$

$$\Psi(\varphi)\Psi(\psi)=\left(\sum_m\pi_i\circ\varphi\circ\iota_m\circ\pi_m\circ\psi\circ\iota_j\right)_{ij}=\left((\pi_i\circ\varphi)\circ(\sum_m\iota_m\circ\pi_m\circ\psi\circ\iota_j)\right)_{ij}$$

Notar que $\sum_m \iota_m \circ \pi_m$ es la identidad, así que tenemos $\Psi(\varphi)\Psi(\psi) = (\pi_i \circ \varphi \circ \psi \circ \iota_j))_{ij} = \Psi(\varphi \circ \psi)$

También es de $\mathbb{K}$-álgebras porque

$$\Psi(\lambda\varphi) = (\pi_i \circ \lambda\varphi \circ \iota_j)_{ij} = (\pi_i \circ \lambda Id \circ \varphi \circ \iota_j)_{ij} = (\lambda Id \circ \pi_i \circ \varphi \circ \iota_j)_{ij} = \lambda(\pi_i \circ \varphi \circ \iota_j)_{ij}$$

Hasta ahora tenemos la siguiente cadena de isomorfismos

$$\begin{aligned} R &\simeq (End(R))^{op} \\ &\simeq \left(End(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i^{k_i}) \right)^{op} \\ &\simeq \left(\prod_{i=1}^{n} End(V_i^{k_i}) \right)^{op} \\ &\simeq \left(\prod_{i=1}^{n} M_{k_i}(End(V_i) \right)^{op} \end{aligned}$$

Además es claro que $(\prod_{i=1}^{n} M_{k_i}(End(V_i)))^{op} \simeq \prod_{i=1}^{n} M_{k_i}(End(V_i))^{op}$ pues las operaciones son coordenada a coordenada. Nos resta ver que podemos pasar el op para adentro y ya concluimos.

Queremos $M_k(X)^{op} \simeq M_k(X^{op})$. Para ello definimos $\varphi : M_k(X)^{op} \longrightarrow M_k(X^{op})$ como $\varphi(A) = A^t$. Es claro que esto es una biyección. Demostremos que es morfismo. Con la suma es inmediato que funciona.

Fijemos notación. Al producto de X^{op} lo anotamos ${\color{blue}\bullet}$, al de $M_k(X^{op})$ ${\color{green}\bullet}$ y al de $M_k(X)^{op}$ ${\color{red}\bullet}$. Tomemos dos matrices $A = (a_{ij})_{ij}$ y $B = (b_{ij})_{ij}$. A sus traspuestas las anotamos $A^t = (a^t_{ij})_{ij}$ y $B^t = (b^t_{ij})_{ij}$ Luego para probar que es morfismo precisamos $\varphi(A{\color{red}\bullet}B) = \varphi(A){\color{green}\bullet}\varphi(B)$

$$\varphi(A{\color{red}\bullet}B) = (A{\color{red}\bullet}B)^t = (\sum_m b_{jm}a_{mi})_{ij} = (\sum_m a_{mi}{\color{blue}\bullet}b_{jm})_{ij} = (\sum_m a^t_{im}{\color{blue}\bullet}b^t_{mj})_{ij} = A^t{\color{green}\bullet}B^t = \varphi(A){\color{green}\bullet}\varphi(B)$$

Por otro lado, es de $\mathbb{K}$-álgebras pues $\varphi(\lambda A) = (\lambda A)^t = (\lambda IdA)^t = A^t\lambda Id = \lambda A$

Juntando todo, podemos concluir que

$$R \simeq \prod_{i=1}^{n} M_{k_i}(End(V_i)^{op})$$

Ahora veamos la segunda parte, así que supongamos que $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado. Al igual que antes, vamos a pensar a $\mathbb{K}$ encajado en $Z(End(V_i)^{op})$ como $\lambda \longmapsto (\lambda \cdot 1)Id_{V_i}$

Sabemos que R tiene dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, entonces $V_i \simeq End(V_i)^{op}$ también tiene dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Sea $x \in End(V_i)^{op}$. Luego $\mathbb{K}(x)$ es una extensión finita de $\mathbb{K}$, pues necesariamente existe un n tal que $\{1, d, d^2, ..., d^n\}$ no es linealmente independiente. Por lo tanto $\mathbb{K} = \mathbb{K}(x)$. Entonces $x \in \mathbb{K}$ y conlcuimos $\mathbb{K} = End(V_i)^{op}$.