Entrega - Teoría de Representaciones

Tahiel Vivallo - Ejercicio 2, Práctico 7

Definición 1 (Álgebra de un grupo)**.** Sea G un grupo y $\mathbb{K}$ un cuerpo. El *álgebra* de G sobre $\mathbb{K}$, denotado $\mathbb{K}G$, se define como el espacio vectorial de las combinaciones lineales formales de elementos de G como base. Es decir:

$$\mathbb{K}G := \left\{ \sum_{g \in G} k_g g, k_g \in \mathbb{K} \right\},$$

y con una multiplicación definida por

$$\left(\sum_{g \in G} k_g g \right) \left(\sum_{h \in G} l_h h \right) = \sum_{g,h \in G} (k_g l_h) gh.$$

Es importante tener en mente que $\mathbb{K}G$ es un módulo sobre sí mismo, como también es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. También, dado $g \in G$, se denotará $1_{\mathbb{K}} g \in \mathbb{K}G$ simplemente como g, y si $k \in \mathbb{K}$, se denotará $k 1_G$ como k.

Observación 2. Siendo $g \in G, u, v \in \mathbb{K}G$, y $k \in \mathbb{K}$, es fácil comprobar que $g(u+v) = gu + gv$, y que también $g(ku) = k(gu)$. Esto implica que, mediante la correspondencia ρ de g a la función $g \cdot - : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}G$, el par $(\mathbb{K}G, \rho)$ es una $\mathbb{K}$-representación lineal de G.

Lema 3 (Escisión de sucesiones exactas cortas)**.** Sea una sucesión exacta corta de R-módulos

$$E : 0 \to M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \to 0.$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe un morfismo $f : P \to N$ tal que $\psi \circ f = id_P$.

2. Existe un morfismo $g : N \to M$ tal que $g \circ \varphi = id_M$.

3. Existe un isomorfismo $h : N \to M \oplus P$ tal que $h \circ \varphi$ es la inclusión de M a $M \oplus P$, y $\psi \circ h^{-1}$ es la proyección de $M \oplus P$ a P.

La demostración de este lema está en el documento "Sucesiones exactas cortas".

Teorema 4 (Ejercicio 2, Práctico 7)**.** Dados G un grupo finito, y $\mathbb{K}$ un cuerpo, $\mathbb{K}G$ es semisimple si y solo si $\mathrm{char}\mathbb{K}$ no divide al orden de G.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Asumamos que $\mathrm{char}\mathbb{K}$ divide a $\#G$ y consideremos la función

$$f : \mathbb{k} \to \mathbb{k}G, \text{ definida por } f(\lambda) = \lambda \sum_{g \in G} g.$$

Es claro que f es un morfismo inyectivo de $\mathbb{K}G$-módulos, por lo que se completa a una sucesión exacta de $\mathbb{K}G$-módulos que comienza en f. Si asumimos semisimplicidad, tenemos que dicha sucesión se escinde, lo que equivale (por el Teorema 4) a que existe un morfismo de $\mathbb{K}G$-módulos $T : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}$ tal que

$$T \circ f = id_{\mathbb{K}}. \quad (*)$$

Luego, si $h, h' \in G$ se tiene $T(h) = T(hh'^{-1}h') = hh'^{-1}T(h') = T(h')$, por lo que

$$T\left(\sum_{g \in G} g\right) = \sum_{g \in G} T(g) = |G|T(e) = 0$$

lo que implica $T(f(1_{\mathbb{K}}) = 0$ y contradice $(*)$.

($\Longleftarrow$) El objetivo es demostrar que, si $\mathrm{char}\mathbb{K}$ no divide a $\#G$, entonces todo submódulo de $\mathbb{K}G$ es un sumando directo.
Primero, como $\mathrm{char}\mathbb{K}$ no divide al orden de G, $|G| := \#G \cdot 1_{\mathbb{K}} \neq 0$, así que tiene sentido definir $\frac{1}{|G|} := |G|^{-1}$.
Sea V un $\mathbb{K}G$-submódulo. Por lo tanto, también V es un $\mathbb{K}$-subespacio vectorial, así que se puede definir una proyección $\mathbb{K}$-lineal de $\mathbb{K}G$ sobre V. Sea π esta proyección. Esto permite definir la función

$$p : \mathbb{K}G \to V, p(x) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\pi(g^{-1}x),$$

Se tiene que p es una función $\mathbb{K}$-lineal, puesto que g actúa linealmente (visto en la Observación 2), y recordando que π es $\mathbb{K}$-lineal. Además, como V es un $\mathbb{K}G$-submódulo, $gv \in V$, para todo $g \in G, v \in V$. También, si $v \in V$, ocurre que

$$p(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\pi(g^{-1}v),$$

y como π es una proyección en V,

$$p(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gg^{-1}v,$$

$$p(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = \frac{1}{|G|} |G| v = v,$$

por lo tanto, p es una proyección $\mathbb{K}$-lineal. Por último, dado $t \in G$, se tiene

$$p(tx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\pi(g^{-1}tx),$$

pero definiendo $h := t^{-1}g$, ocurre que $h^{-1} = g^{-1}t$, y que $g = th$. Tomando en cuenta que, en la suma, g recorre todo G, eso implica que h también recorre todo G, así que se puede hacer este cambio en el índice de la suma:

$$p(tx) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} th\pi(h^{-1}x),$$

y como t actúa linealmente, se llega a

$$p(tx) = t\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h\pi(h^{-1}x) = tp(x),$$

demostrando además que p es un morfismo de $\mathbb{K}G$-módulos. Ahora, se considera la siguiente sucesión exacta corta:

$$E : 0 \to \text{Ker } p \xrightarrow{i} \mathbb{K}G \xrightarrow{p} V \to 0,$$

donde i es la inclusión de Ker p en $\mathbb{K}G$. Luego, se tiene la inclusión i' de V en $\mathbb{K}G$, y dicha inclusión satisface la propiedad $i' \circ p = p|_V = id_V$, así que, según el lema de escisión, $\mathbb{K}G$ es isomorfo a $V \oplus \text{Ker } p$, pero como V y Ker p son submódulos, entonces $\mathbb{K}G = V \oplus \text{Ker } p$, probando que V es un sumando directo de $\mathbb{K}G$. Así se demostró que todo $\mathbb{K}G$-submódulo de $\mathbb{K}G$ es un sumando directo, y entonces, es semisimple. $\square$