Practico 7

Ejercicio 6

Luciana Sastre

1. Ejercicio 6

Sean (A, m, u), (C, Δ, ε) respectivamente una $\mathbb{K}$-álgebra y $\mathbb{K}$-coálgebra

1. Definir el producto de convolución en $Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$ y probar que es asociativo y con neutro $u\varepsilon$
2. Un álgebra de Hopf es una biálgebra B tal que $id_B \in Hom_{\mathbb{K}}(B, B)$ es invertible por convolución. A su inversa se le llama antípoda y se la nota S. Explicitar, por un lado con diagramas, por otro lado con fórmulas, la definición de S.

1.1. Parte 1

Definir el producto de convolución en $Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$ y probar que es asociativo y con neutro $u\varepsilon$

Dem:

Sean $f, g \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$. Definimos su producto de convolución como:

$$(f * g)(c) := m(f \otimes g)(\Delta)(c) = \sum f(c^{(1)})g(c^{(2)})$$

donde $\Delta(c) = \sum c^{(1)} \otimes c^{(2)}$.

Para probar su asociatividad recordemos que m es asociativa y la siguiente propiedad de Δ: $\sum c_1^{(1)} \otimes c_2^{(1)} \otimes c^{(2)} = \sum c^{(1)} \otimes c_1^{(2)} \otimes c_2^{(2)}$ y por tanto la podemos pensar como $\sum c^{(1)} \otimes c^{(2)} \otimes c^{(3)}$
Entonces tenemos:

$$(f*(g*h))(c) = \sum f(c^{(1)})(g*h)(c^{(2)}) = \sum f(c^{(1)})(g(c^{(2)})h(c^{(3)})) = \sum (f(c^{(1)})g(c^{(2)}))h(c^{(3)}) = ((f*g)*h)(c)$$

Veamos ahora que $u\varepsilon$ es neutro. Recordemos que $f \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$ y por tanto f es $\mathbb{K}$-lineal. Recordemos también que $u(1_A) = 1_{\mathbb{K}}$ y la siguiente propiedad de ε: $c = \sum c^{(1)}\varepsilon(c^{(2)}) = \sum \varepsilon(c^{(1)})c^{(2)}$. Entonces:

$$(f * u\varepsilon)(c) = \sum f(c^{(1)})(u\varepsilon)(c^{(2)}) = \sum f(c^{(1)})u(\varepsilon(c^{(2)})) = \sum f(c^{(1)})\varepsilon(c^{(2)})u(1)$$

$$= \sum f(c^{(1)}\varepsilon(c^{(2)})) = f(\sum c^{(1)}\varepsilon(c^{(2)})) = f(c)$$

$$(u\varepsilon * f)(c) = \sum (u\varepsilon)(c^{(1)})f(c^{(2)}) = \sum u(\varepsilon(c^{(1)}))f(c^{(2)}) = \sum \varepsilon(c^{(1)})u(1)f(c^{(2)})$$

$$= \sum f(\varepsilon(c^{(1)})c^{(2)}) = f(\sum \varepsilon(c^{(1)})c^{(2)}) = f(c)$$

1.2. Parte 2

Un álgebra de Hopf es una biálgebra B tal que $id_B \in Hom_{\mathbb{K}}(B, B)$ es invertible por convolución. A su inversa se le llama antípoda y se la nota S. Explicitar, por un lado con diagramas, por otro lado con fórmulas, la definición de S.

Dem:

Decimos que id_B es invertible por convolución si existe S tal que $S * id_B = id_B * S = u\varepsilon$. Es decir, si existe S tal que

$$\sum S(c^{(1)})c^{(2)} = \sum c^{(1)}S(c^{(2)}) = u(\varepsilon(c))$$

o equivalentemente si existe S tal que

$$(m(S \otimes id_B)\Delta)(c) = (m(id_B \otimes S)\Delta)(c) = u\varepsilon(c)$$

El diagrama luce de la siguiente manera (donde los dos triángulos conmutan):

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[drr, "u\varepsilon"] & B \otimes B \arrow[r, "Id_B \otimes S"] & B \otimes B \arrow[d, "m"] \\
B \otimes B \arrow[r, "S \otimes Id_B"'] & B \otimes B \arrow[r, "m"'] & B
\end{tikzcd}$$