7)a) Consideramos a $\Bbbk G$ con la estructura trivial de coálgebra, es decir, $\Delta(g) = g \otimes g$ y $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$ y extendidas linealmente. Recordar que la antípoda $S : \Bbbk G \to \Bbbk G$ es la inversa por convolución de la identidad $Id : \Bbbk G \to \Bbbk G$. Por el ejercicio 6 parte b, sabemos que es la única que hace conmutar los siguientes diagramas.

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk G \otimes \Bbbk G \arrow[r, "Id\otimes S"] & \Bbbk G \otimes \Bbbk G \arrow[d, "m"] \\
\Bbbk G \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "u\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"'] & \Bbbk G \\
\Bbbk G \otimes \Bbbk G \arrow[r, "S\otimes Id"] & \Bbbk G \otimes \Bbbk G \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

Entonces, veamos que S está dada por $S(g) = g^{-1}$, y extendida linealmente. Sea $g \in G$, entonces:

$$m((Id \otimes S)(\Delta(g))) = m((Id \otimes S)(g \otimes g) = m(g \otimes g^{-1}) = e = u(1) = u(\varepsilon(g))$$

$$m((S \otimes Id)(\Delta(g))) = m((S \otimes Id)(g \otimes g) = m(g^{-1} \otimes g) = e = u(1) = u(\varepsilon(g))$$

Como todas son lineales, extendidas linealmente también conmutan el diagrama.

b) Supongamos que existe la antípoda $S : \Bbbk[x] \to \Bbbk[x]$, por el ejercicio 8 sabemos que es un antimorfismo de álgebras, entonces por lo pronto debe valer $S(1) = 1$.
Además $0 = u(\varepsilon(x)) = m(1 \otimes S(x) + x \otimes S(1)) = S(x) + x\, S(1)$, pero necesariamente $S(1) = 1$, entonces $S(x) = -x$.
Luego si la antipoda existe, debe ser $S(x^n) = (-1)^n\, x^n$.
Entonces queremos ver si el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk[x] \arrow[r, "Id\otimes S"] & \Bbbk[x] \otimes \Bbbk[x] \arrow[d, "m"] \\
\Bbbk[x] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "u\varepsilon"] \arrow[d, "\Delta"'] & \Bbbk[x] \\
\Bbbk[x] \otimes \Bbbk[x] \arrow[r, "S\otimes Id"] & \Bbbk[x] \otimes \Bbbk[x] \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

Entonces,

$$m((Id \otimes S)(\Delta(x^n))) = m((Id \otimes S)(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i})) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} m(x^i \otimes x^{n-i}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} x^n$$

$$m((S \otimes Id)(\Delta(x^n))) = m((S \otimes Id)(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i})) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i} m(x^i \otimes x^{n-i}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i} x^n$$

Y tenemos $u(\varepsilon(x^n)) = u(\delta_{n,0}) = \delta_{n,0}$
Recordemos la igualdad de Stiefel o regla de Pascal, para $1 \leq i \leq n-1$ vale,

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}$$

Afirmación. *Vale* $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} = \delta_{n,0}$

Demostración. La igualdad es claramente cierta para $n = 0$, supongamos $n \geq 1$. Entonces,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i = \binom{n}{0} + \binom{n}{n}(-1)^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}(-1)^i = \binom{n}{0} + \binom{n}{n}(-1)^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1}(-1)^i + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i}(-1)^i =$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{n}(-1)^n + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i}(-1)^{i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i}(-1)^i$$

$$= \binom{n-1}{0} + \left(\binom{n}{n}(-1)^n + \binom{n-1}{n-1}(-1)^{n-1}\right) + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i}(-1)^{i+1} + \sum_{i=1}^{n-2} \binom{n-1}{i}(-1)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i}(-1)^{i+1} + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i}(-1)^i = -\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i}(-1)^i + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i}(-1)^i = 0 = \delta_{n,0}$$

La otra igualdad es análoga. □

Por tanto concluimos que S es la antípoda.