1 Ejercicio 8

Recordar las definiciones de álgebra, coálgebra y biálgebra, del ejercicio 4, y las definiciones de producto de convolución, y álgebra de Hopf, del ejercicio 7.

Primero vamos a probar que la antípoda es un antimorfismo de álgebras, es decir $S(1) = 1$ y $S(xy) = S(x)S(y)$

Veamos que S preserva la unidad.

$$S(1) = 1 \cdot S(1) = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta(1) = u \circ \varepsilon(1) = 1$$

Ahora vemos que S antipreserva el producto, para esto vemos que tanto $S \circ m$ como $m^{op} \circ (S \otimes S)$, son inversas por convolución de m en el monoide $Hom_{\Bbbk}(B \otimes B, B)$. Comencemos por $S \circ m$. Tenemos:

$$(m \star (S \circ m))(x \otimes y) = (m \circ (m \otimes (S \circ m)) \circ \Delta_{\otimes})\,(x \otimes y)$$

$$= (m \circ (id \otimes S) \circ (m \otimes m))\,(\sum (x_1 \otimes y_1) \otimes (x_2 \otimes y_2)) = (m \circ (id \otimes S))\,(x_1 y_1 \otimes x_2 y_2)$$

$$= (m \circ (id \otimes S))\,((xy)_1 \otimes (xy)_2) = (xy)_1 \; S((xy)_2) = (u \circ \varepsilon(xy))$$

Ahora veamos que $(m^{op} \circ (S \otimes S))$ y m también son inversas por convolución en $Hom_{\Bbbk}(B \otimes B, B)$:

$$((m^{op} \circ (S \otimes S)) \star m)\,(x \otimes y) = \Big((m^{op} \circ (S \otimes S)) * m\Big)(x \otimes y) = \sum S(x_1)S(y_1)y_2x_2$$

$$= \sum S(x_1)\;(u \circ \varepsilon)(y)\;x_2 = \sum S(x_1)\;\varepsilon(y) \cdot 1\;x_2 = \sum S(x_1)x_2 \cdot \varepsilon(y)$$

$$= 1 \cdot \varepsilon(x)\varepsilon(y) = (u \circ \varepsilon(xy))$$

La demostración termina notando que:

$$\nu = \nu * e = \nu * (m * \rho) = (\nu * m) * \rho = e * \rho = \rho$$

Donde $\nu = m^{op} \circ (S \otimes S)$, $m = m$, $\rho = S \circ m$ y $e = u \circ \varepsilon \otimes \varepsilon$.

Puede probarse también que S es un antimorfismo de coálgebras, pero no hemos dado la teoría de coágebras a fondo y no viene al caso. El resultado para álgebras es necesario para probar que si V es un H-módulo a izquierda y H es de Hopf, entonces V^* admite una estructura de H-módulos (ver ejercicio 9 del repartido 7).