Ejercicio 3.
Sea $(M,*)$ monoide $(\mathbb{K},+,\cdot)$ cuerpo

a) Definir la $\mathbb{K}$-álgebra de monoide de $\mathbb{K}M$.

$$\mathbb{K}M = \sum_{m\in M} k_m . m \ : k_m \in \mathbb{K} \ \forall m \in M \ \#\{m : k_m \neq 0\} < \infty \}$$

$\Rightarrow$ Dado $v = \sum_{m\in M} k_m . m$, $\omega = \sum_{m \in M} h_m \, m \in \mathbb{K}M$

$v+\omega = \sum_{m\in M} (k_m + h_m) . m \Rightarrow \{m : k_m + h_m \neq 0\} \subseteq \{m : k_m \neq 0\} \cup \{m : h_m \neq 0\}$

$\Rightarrow \# \{m : k_m \neq 0\} < \infty \Rightarrow v + \omega \in \mathbb{K}M$.

$\Rightarrow$ Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, $v = \sum_{m\in M} k_m . m \in \mathbb{K}M$.

$\lambda . v = \sum_{m\in M} \lambda k_m . m$, $\Rightarrow \{m : \lambda k_m \neq 0\} = \{m : k_m \neq 0\}$ si $\lambda \neq 0$

$\Rightarrow \lambda v \in \mathbb{K}M$

Por la propiedad distributiva de $\mathbb{K} \Rightarrow \lambda(v+\omega) = \lambda v + \lambda \omega$
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $v, \omega \in \mathbb{K}M \Rightarrow (\mathbb{K}M, +)$ es un $\mathbb{K}$-ev.

$\Rightarrow$ Dado $v = \sum_{m\in M} k_m \, m$, $\omega = \sum_{n\in M} h_n . n \in \mathbb{K}M$

$v . \omega = \sum_{m,n \in M} (k_m . h_n)(m * n)$

Por la asociatividad de M y asociatividad, conmutatividad y propiedad distributiva de $\mathbb{K}$

$\Rightarrow$
- $v(\omega + \mu) = v.\omega + v.\mu$
- $(v+\omega)\mu = v\mu + \omega\mu$
- $\lambda(v.\omega) = (\lambda v)\omega = v(\lambda\omega)$

$\forall v, \omega, \mu \in \mathbb{K}M$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\Rightarrow (\mathbb{K}M, +, \cdot)$ es una $\mathbb{K}$-álgebra.

b) Si $V, W, U \in {}_{\mathbb{K}M}\mathcal{M}$ entonces
$\cdot V \otimes_K W$ también lo es.
$\cdot (V \otimes_K W) \otimes_K U \cong V \otimes_K (W \otimes_K U)$ como $\mathbb{K}M$-modulo

$V \otimes_K W = \{ v \otimes w : v \in V, w \in W \}$.

$\cdot \; v \otimes w + v' \otimes w' = (v+v') \otimes (w + w')$
$\cdot \; \lambda (v \otimes w) = \lambda v \otimes w = v \otimes \lambda w$

$\forall \; v \otimes w, v' \otimes w' \in V \otimes W, \; \lambda \in \mathbb{K}$

Dado $m \in M$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \otimes w \in V \otimes W$

$\cdot \; m.(v \otimes w) = mv \otimes mw$
$\cdot \; \lambda (v \otimes w) = \lambda v \otimes w = v \otimes \lambda w$

Extendamos por linealidad a una acción de $\mathbb{K}M$

Sabemos que $V \otimes_K W$ con la suma punto a punto es grupo abeliano, veamos que con la acción que definimos es $\mathbb{K}M$-módulo

sea $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ $m_1, m_2 \in M$, $v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2 \in V \otimes_{\mathbb{K}} W$

$\cdot \; (\lambda_1 m_1) \{ (\lambda_2 m_2) . v_1 \otimes w_1 \} = (\lambda_1 m_1)(\lambda_2 \; m_2 v_1 \otimes m_2 w_1)$
$= \lambda_1 \lambda_2 \; m_1 (m_2 v_1) \otimes m_1 (m_2 w_1) = \lambda_1 \lambda_2 \; (m_1 * m_2) v_1 \otimes (m_1 * m_2) w_1$
$= \lambda_1 \lambda_2 . (m_1 * m_2) . (v_1 \otimes w_2)$ ✓

$\cdot \; (\lambda_1 m_1)(v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2) = \lambda_1 m_1 . \; (v_1 + v_2) \otimes (w_1 + w_2)$
$= \lambda_1 \; m_1 (v_1 + v_2) \otimes m_1 (w_1 + w_2) = \lambda_1 (m_1 v_1 + m_1 v_2) \otimes (m_1 w_1 + m_1 w_2)$
$= \lambda_1 \; ((m_1 v_1 \otimes m_1 w_1) + (m_1 v_2 \otimes m_1 w_2)) =$
$= \lambda_1 (m_1 v_1 \otimes m_1 w_1) + \lambda_1 (m_1 v_2 \otimes m_1 w_2)$
$= \lambda_1 m_1 (v_1 \otimes w_1) + \lambda_1 m_1 (v_2 \otimes w_2)$.

$\cdot \; 1 (v_1 \otimes w_1) = 1 (1 v_1 \otimes 1 w_1) = v_1 \otimes w_1$ $\square$

Sabemos que $(V\otimes_{\mathbb{K}} W)\otimes_{\mathbb{K}} U \cong V\otimes_{\mathbb{K}}(W\otimes_{\mathbb{K}} U)$ como $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, vía:

$$\varphi: (V\otimes_{\mathbb{K}} W)\otimes_{\mathbb{K}} U \to V\otimes_{\mathbb{K}}(W\otimes_{\mathbb{K}} U)$$
$$\varphi((v\otimes w)\otimes u) = v\otimes(w\otimes u)$$

Veamos que es morfismo de $\mathbb{K}M$-módulos:
Sea $\lambda\in\mathbb{K}$, $m\in M$,

$$\varphi(\lambda m((v\otimes w)\otimes u)) = \lambda\varphi(m(v\otimes w)\otimes mu))$$
$$=\lambda\varphi((mv\otimes mw)\otimes mu) = \lambda(mv\otimes(mw\otimes mu))$$
$$=\lambda\, mv\otimes(mw\otimes mu) = \lambda m\; v\otimes(w\otimes u)$$
$$=\lambda m\;\varphi((v\otimes w)\otimes u).\ \square$$

c) Probar que $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}M$-módulo y que $V\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{K}$, V, $\mathbb{K}\otimes_{\mathbb{K}}V$ son isomorfos como $\mathbb{K}M$-módulos

Sea $\varphi: V\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{K}\to V$ / $\varphi(v\otimes\lambda)=\lambda v$

Veamos que φ morfismo de $\mathbb{K}M$-modulos

$$\varphi(v_1\otimes\lambda_1+v_2\otimes\lambda_2)=\varphi(\lambda_1(v_1\otimes 1)+\lambda_2(v_2\otimes 1))$$
$$=\varphi(\lambda_1v_1\otimes 1+\lambda_2v_2\otimes 1)=\varphi((\lambda_1v_1+\lambda_2v_2)\otimes 1)$$
$$=1.(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2)=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2=\varphi(v_1\otimes\lambda_1)+\varphi(v_2\otimes\lambda_2)$$

Sea $m\in M$, $v\otimes\lambda\in V\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{K}$, supongamos $m.\lambda=\lambda$

$$\varphi(m(v\otimes\lambda))=\varphi(mv\otimes m\lambda)=\varphi(mv\otimes\lambda)=\lambda(mv)$$
$$=\lambda(m.(1v))=\lambda((m.1)v)=(m.1)(\lambda v)=m(\lambda v)$$
$$=m\,\varphi(v\otimes\lambda)$$

Sea $\eta: V\to V\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{K}$ / $v\mapsto v\otimes 1$

η naturalmente morfismo de $\mathbb{K}M$-módulos

- $\varphi(\eta(v))=\varphi(v\otimes 1)=v$
- $\eta(\varphi(v\otimes\lambda))=\eta(\lambda v)=\lambda v\otimes 1=v\otimes\lambda$

$\Rightarrow\varphi$ invertible $\Rightarrow\varphi$ isomorfismo

Analogamente se muestra $V\cong\mathbb{K}\otimes_{\mathbb{K}}V$

Usamos que $\mathbb{K}$ $\mathbb{K}M$-módulo con la acción:

- $m.\lambda=\lambda\quad\forall m\in M,\lambda\in\mathbb{K}$
- $\mu.\lambda=\mu\lambda\quad\forall\mu,\lambda\in\mathbb{K}$

Extendiendo linealmente a $\mathbb{K}M$

Eso tiene estructura de $\mathbb{K}M$-módulos por la estructura de cuerpo de $\mathbb{K}$

d) Si M grupo:
- V^* $\mathbb{K}M$-módulo si lo es V $\mathbb{K}M$-modulo
- $ev: V^* \otimes_{\mathbb{K}} V \to \mathbb{K}$ es un morfismo de $\mathbb{K}M$-modulos

$V^* = Hom_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$, sabemos que es grupo abeliano con $+$ definamos la siguiente acción:

- $m.\varphi(v) = \varphi(m^{-1}v) \quad \forall \varphi \in V^*, m \in M, v \in V$
- $\lambda.\varphi(v) = \lambda\varphi(v) \quad \forall \varphi \in V^*, m \in M, v \in V$

Y extendamos linealmente a una acción de $\mathbb{K}M$
Veamos que $V^* \mathbb{K}$ con esta acción es $\mathbb{K}M$-modulo:

Dado $\varphi \in V^*, n, m \in M$:

$\cdot (nm)\varphi(v) = \varphi((nm)^{-1}v) = \varphi((m^{-1}n^{-1})v)$
$= \varphi(m^{-1}(n^{-1}v)) = m\varphi(n^{-1}v) = m(n\varphi(v)) \quad \square$

Veamos ahora que ev es morfismo:

$ev(\lambda m . \varphi \otimes v) = ev(\lambda m\varphi \otimes mv)$
$= \lambda m\varphi(\lambda mv) = \lambda\varphi(m^{-1}mv) = \lambda\varphi(v)$

$\lambda m. ev(\varphi \otimes v) = \lambda m. \varphi(v) = \lambda\varphi(v)$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, m \in M, \varphi \in V^*, v \in V \quad \square$