Ejercicio 5

Sea $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ $\mathbb{K}$-biálgebra.

Sean V, W A-módulos a izquierda (las demostraciones para A-módulos a derecha son análogas).

Que M sea un A-módulo a izquierda es por definición que M sea $\mathbb{K}-\mathbb{K}$ bimódulo junto con un morfismo de $\mathbb{K}$-módulos $\mu_M : A \otimes_{\mathbb{K}} M \to M$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

(A partir de ahora el producto tensorial se asume sobre $\mathbb{K}$)

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "id \otimes \mu_M"] \arrow[d, "m \otimes id"] & A \otimes M \arrow[d, "\mu_M"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\mu_M"] & M \end{tikzcd} \qquad (\mathrm{I})$$

Como $\mathbb{K}$-módulos

$$\begin{tikzcd} M \cong \mathbb{K} \otimes M \arrow[r, "u \otimes id"] \arrow[dr, "id"'] & A \otimes M \arrow[d, "\mu_M"] \\ & M \end{tikzcd} \qquad (\mathrm{II})$$

Ya se ha visto previamente que $V \otimes W$ también es un $\mathbb{K}-\mathbb{K}$ bimódulo. Para ver que es un A-módulo a izquierda vamos a ver que los diagramas (I) y (II) conmutan si se equipa $V \otimes W$ con el morfismo $\mu_{V \otimes W}$ definido por la composición

$$\begin{tikzcd} A \otimes V \otimes W \arrow[r, "\Delta \otimes 1"] & A \otimes A \otimes V \otimes W \arrow[d, "1 \otimes \tau \otimes 1"] & \\ & A \otimes V \otimes A \otimes W \arrow[r, "\mu_V \otimes \mu_W"] & V \otimes W \end{tikzcd}$$

... donde τ es el isomorfismo de $\mathbb{K}$-módulos $M \otimes N \to N \otimes M$

Dem.: Se verifica que los siguientes diagramas conmutan:

$\widetilde{(\mathrm{I})}$

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes V\otimes W \arrow[r, "1\otimes\Delta\otimes1\otimes1"] \arrow[ddd, "m\otimes1\otimes1"] & A\otimes A\otimes A\otimes V\otimes W \arrow[r, "1\otimes1\otimes\tau\otimes1"] \arrow[d, "\Delta\otimes1\otimes1\otimes1\otimes1"] & A\otimes A\otimes V\otimes A\otimes W \arrow[r, "1\otimes\mu_v\otimes\mu_w"] \arrow[d, "\Delta\otimes1\otimes1\otimes1\otimes1"] & A\otimes V\otimes W \arrow[d, "\Delta\otimes1\otimes1"] \\
 & A\otimes A\otimes A\otimes A\otimes V\otimes W \arrow[r, "1\otimes1\otimes1\otimes\tau\otimes1"] \arrow[d, "1\otimes\tau\otimes1\otimes1\otimes1"] & A\otimes A\otimes A\otimes V\otimes A\otimes W \arrow[r, "1\otimes1\otimes\mu_v\otimes\mu_w"] \arrow[d, "1\otimes\tau(A,A\otimes V)\otimes1\otimes1"] & A\otimes A\otimes V\otimes W \arrow[d, "1\otimes\tau\otimes1"] \\
 & A\otimes A\otimes A\otimes A\otimes V\otimes W \arrow[r, "1\otimes1\otimes\tau(A\otimes A,V)\otimes1"] \arrow[d, "m\otimes m\otimes1\otimes1"] & A\otimes A\otimes V\otimes A\otimes A\otimes W \arrow[r, "1\otimes\mu_v\otimes1\otimes\mu_w"] \arrow[d, "m\otimes1\otimes m\otimes1"] & A\otimes V\otimes A\otimes W \arrow[d, "\mu_v\otimes\mu_w"] \\
A\otimes V\otimes W \arrow[r, "\Delta\otimes1\otimes1"] & A\otimes A\otimes V\otimes W \arrow[r, "1\otimes\tau\otimes1"] & A\otimes V\otimes A\otimes W \arrow[r, "\mu_v\otimes\mu_w"] & V\otimes W
\end{tikzcd}
$$

$\widetilde{\mathrm{II}}$)

$$
\begin{tikzcd}
V\otimes W \arrow[dd, "="'] & \cong & \mathbb{K}\otimes V\otimes W \arrow[r, "u\otimes 1\otimes 1"] \arrow[d, "\cong"] & A\otimes V\otimes W \arrow[d, "\Delta\otimes 1\otimes 1"] \\
 & & \mathbb{K}\otimes\mathbb{K}\otimes V\otimes W \arrow[r, "u\otimes u\otimes 1\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\tau\otimes 1"] & A\otimes A\otimes V\otimes W \arrow[d, "1\otimes\tau\otimes 1"] \\
V\otimes W & \cong & \mathbb{K}\otimes V\otimes\mathbb{K}\otimes W \arrow[r, "u\otimes 1\otimes u\otimes 1"] \arrow[dr, "1"'] & A\otimes V\otimes A\otimes W \arrow[d, "\mu_V\otimes\mu_W"] \\
 & & & V\otimes W
\end{tikzcd}
$$

Tenemos que $\widetilde{(\mathrm{I})}$ conmuta pues el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[d, "m"] & A\otimes A\otimes A\otimes A \arrow[r, "1\otimes\tau\otimes 1"] & A\otimes A\otimes A\otimes A \arrow[d, "m\otimes m"] \\
A \arrow[rr, "\Delta"] & & A\otimes A
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{(\mathrm{II})}$ conmuta pues el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{K} \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "u\otimes u"] & \\
A \arrow[rr, "\Delta"] & & A\otimes A
\end{tikzcd}$$

Esto se debe a que A es $\mathbb{K}$-biálgebra (por definición).

Además, es claro que $\mathbb{K}$ es $\mathbb{K}$-módulo. Para ver que es A-módulo a izquierda vamos a ver que los diagramas (I) y (II) conmutan equipando a $\mathbb{K}$ con el morfismo $\mu_{\mathbb{K}}$ definido por $A \otimes \mathbb{K} \cong A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K}$.

<u>Dem</u>: Se verifica que los siguientes diagramas conmutan:

$\overset{\approx}{(\mathrm{I})}$

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes\mathbb{K} \arrow[d, "m\otimes 1"] & \cong & A\otimes A \arrow[r, "1\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "m"] & A\otimes\mathbb{K}\cong A \arrow[d, "\varepsilon"] \\
A\otimes\mathbb{K} & \cong & A \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

$\overset{\approx}{(\mathrm{II})}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}\cong\mathbb{K}\otimes\mathbb{K} \arrow[r, "u\otimes 1"] \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[dr, "1"'] & A\otimes\mathbb{K}\cong A \arrow[d, "\varepsilon"] \\
 & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $\widetilde{\widetilde{(\mathrm{I})}}$ conmuta pues el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "\varepsilon \otimes \varepsilon"'] & & A \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
& \mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{\widetilde{(\mathrm{II})}}$ conmuta pues el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[rr, "id"] & & \mathbb{K} \\
& A \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Nuevamente esto es por def. de $\mathbb{K}$-biálgebra.

Ahora, para ver que $(V\otimes W)\otimes U$ es isomorfo a $V\otimes(W\otimes U)$ como A-módulo a izquierda utilizamos que ya existe un asociador en la categoría de $\mathbb{K}$-módulos (que es una categoría monoidal) dado por

$$\alpha_{V,W,U}: (V\otimes W)\otimes U \xrightarrow{\sim} V\otimes(W\otimes U)$$

A priori este puede no ser un asociador de A-módulos a izquierda ya que falta ver que es A-lineal.

Para ver esto utilizamos la coasosiatividad de A, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & & A\otimes A \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\
A\otimes A \arrow[r, "\Delta\otimes id"] & (A\otimes A)\otimes A \cong & A\otimes(A\otimes A)
\end{tikzcd}$$

Como $(V\otimes W)\otimes U$ también es un $(A\otimes A)\otimes A$ módulo a izquierda con el morfismo $(\mu_V\otimes\mu_W)\otimes\mu_U$, $V\otimes(W\otimes U)$ es $A\otimes(A\otimes A)$-módulo a izquierda con el morfismo $\mu_V\otimes(\mu_W\otimes\mu_U)$ y el diagrama anterior conmuta entonces tenemos que $\mu_V\otimes(\mu_W\otimes\mu_U) = \alpha_{V,W,U}\circ(\mu_V\otimes\mu_W)\otimes\mu_U$, lo que nos da lo que queríamos.

Finalmente, debemos ver que $V\otimes\mathbb{K}$, V y $\mathbb{K}\otimes V$ son isomorfos como A-módulos a izquierda. Nuevamente utilizamos que esto es cierto para $\mathbb{K}$-módulos:

Tenemos un unitor a izquierda y un unitor a derecha, $\mathbb{K}$-lineales, dados por:

$$\lambda_V : \mathbb{K}\otimes V \to V, \qquad \rho_V : V\otimes\mathbb{K} \to V$$

Para ver que estos también son A-lineales utilizamos que el siguiente diagrama (comultiplicación) conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrr, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[drr, "id"] & & & A\otimes A \arrow[d, "id\otimes\varepsilon"] \\
A\otimes A \arrow[r, "\varepsilon\otimes id"] & \mathbb{K}\otimes A \arrow[r, phantom, "\cong"] & A \arrow[r, phantom, "\cong"] & A\otimes\mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $V\otimes\mathbb{K}$ también es $A\otimes\mathbb{K}$-módulo a izquierda según el morfismo $\mu_V\otimes\varepsilon$ y $\mathbb{K}\otimes V$ es $\mathbb{K}\otimes A$-módulo a izquierda según $\varepsilon\otimes\mu_V$.

Como el diagrama anterior conmuta tenemos entonces que $\lambda_V \circ \varepsilon\otimes\mu_V = \mu_V$ y $\rho_V \circ \mu_V\otimes\varepsilon = \mu_V$, obteniendo el resultado deseado.

Referencia: Advanced Algebra, B. Pareigis
Caps. 2, 11, 12