

Ejercicio 5

Sea $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ \mathbb{K} -bidalgebra.

Sean V, W A -módulos a izquierda. (Las demostraciones para A -módulos a derecha son análogas).

Que M sea un A -módulo a izquierda es por definición que M sea \mathbb{K} - \mathbb{K} bimódulo junto con un morfismo de \mathbb{K} -módulos $\mu_M: A \otimes_{\mathbb{K}} M \rightarrow M$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

(A partir de ahora el producto tensorial se asume sobre \mathbb{K})

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes M & \xrightarrow{\text{id} \otimes \mu_M} & A \otimes M \\ \downarrow m \otimes \text{id} & & \downarrow \mu_M \end{array} \quad (\text{I})$$

Como \mathbb{K} -módulos $A \otimes M \xrightarrow{\mu_M} M$

$$\begin{array}{ccc} M \cong \mathbb{K} \otimes M & \xrightarrow{u \otimes \text{id}} & A \otimes M \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \mu_M \\ & & M \end{array} \quad (\text{II})$$

Ya se ha visto previamente que $V \otimes W$ también es un \mathbb{K} - \mathbb{K} bimódulo. Para ver que es un A -módulo a izquierda vamos a ver que los diagramas (I) y (II) conmutan si se equipa $V \otimes W$ con el morfismo $\mu_{V \otimes W}$ definido por la composición

Flex

Papirer

$$A \otimes V \otimes W \xrightarrow{\Delta \otimes 1} A \otimes A \otimes V \otimes W$$

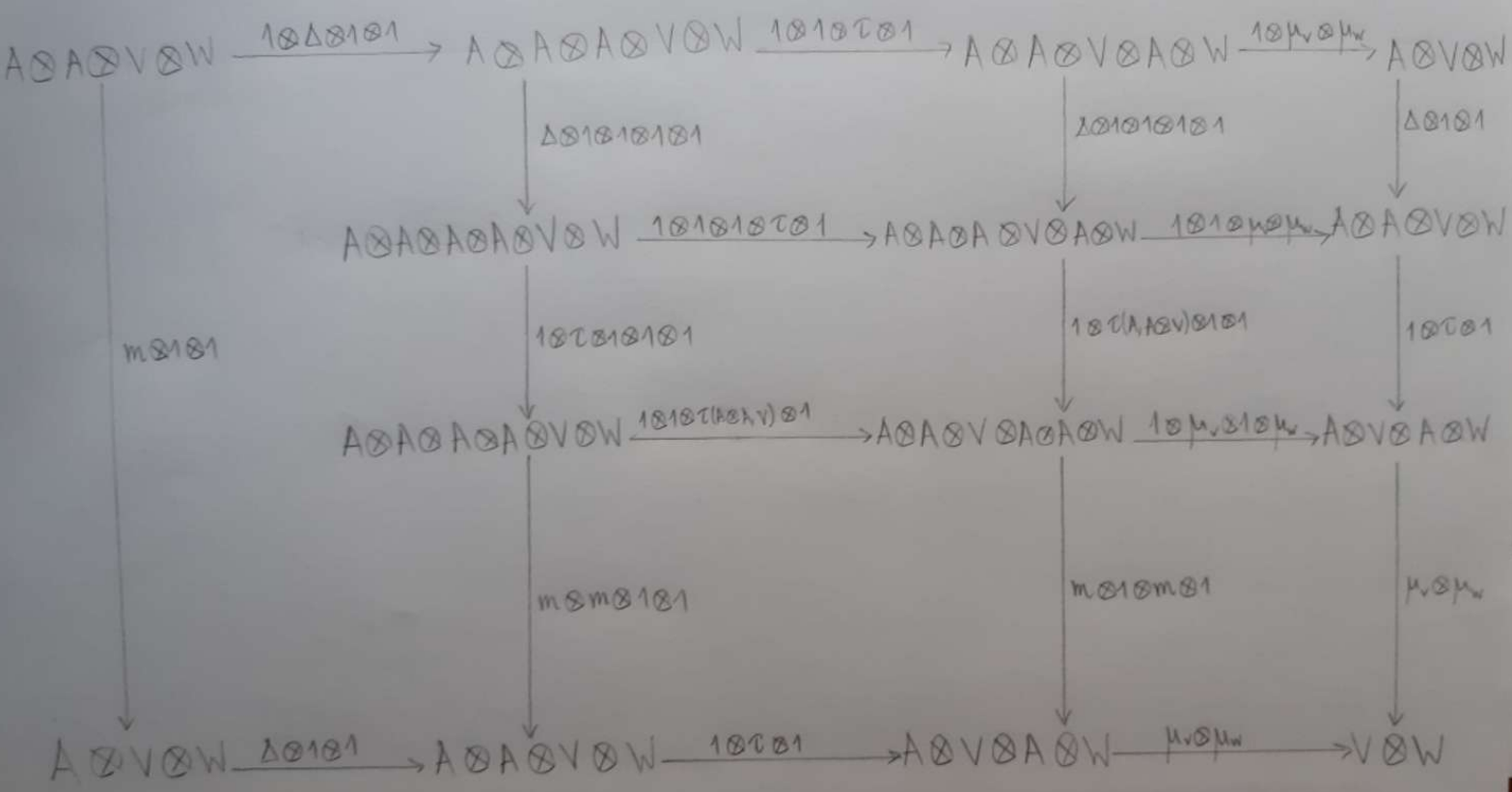
$$\downarrow 1 \otimes \tau \otimes 1$$

$$A \otimes V \otimes A \otimes W \xrightarrow{\mu_V \otimes \mu_W} V \otimes W$$

... donde τ es el isomorfismo de K -módulos $M \otimes N \rightarrow N \otimes M$

Demi. Se verifica que los siguientes diagramas conmutan:

(I)



(II)

$$\begin{array}{ccccc} V \otimes W \cong K \otimes V \otimes W & \xrightarrow{u \otimes 1 \otimes 1} & A \otimes V \otimes W & & \\ \downarrow = & \downarrow \cong & \downarrow \Delta \otimes 1 \otimes 1 & & \\ K \otimes K \otimes V \otimes W & \xrightarrow{u \otimes u \otimes 1 \otimes 1} & A \otimes A \otimes V \otimes W & & \\ \downarrow & \downarrow 1 \otimes \tau \otimes 1 & \downarrow 1 \otimes \tau \otimes 1 & & \\ V \otimes W \cong K \otimes V \otimes K \otimes W & \xrightarrow{u \otimes 1 \otimes u \otimes 1} & A \otimes V \otimes A \otimes W & & \\ & \searrow 1 & \downarrow \mu_V \otimes \mu_W & & \\ & & V \otimes W & & \end{array}$$

Tenemos que $\tilde{\text{I}}$ conmuta pues el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{\Delta \otimes \Delta} & A \otimes A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes \tau \otimes 1} & A \otimes A \otimes A \otimes A \\
 \downarrow m & & & & \downarrow m \otimes m \\
 A & \xrightarrow{\Delta} & & & A \otimes A
 \end{array}$$

$\tilde{\text{II}}$ conmuta pues el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & K & \\
 u \swarrow & & \searrow u \otimes 1 \\
 A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A
 \end{array}$$

Esto se debe a que A es K -biálgebra (por definición).

Además, es claro que K es K -módulo. Para ver que es A -módulo a izquierda vamos a ver que los diagramas (I) y (II) conmutan equipando a K con el morfismo μ_K definido por $A \otimes K \cong A \xrightarrow{e} K$.

Dem. Se verifica que los siguientes diagramas conmutan:

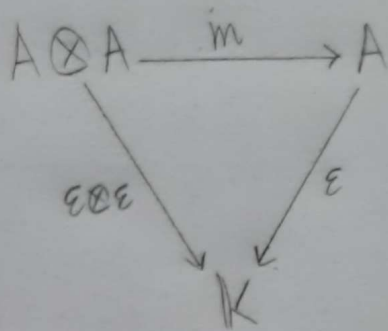
\cong
(I)

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes A \otimes K \cong A \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} & A \otimes K \cong A & & \\ \downarrow m \otimes 1 & & \downarrow m & & \downarrow \varepsilon \\ A \otimes K \cong A & \xrightarrow{\varepsilon} & K & & \end{array}$$

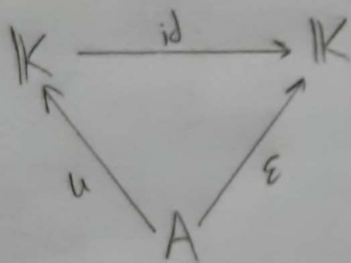
\cong
(II)

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\mu} & \\ K \cong K \otimes K & \xrightarrow{\mu \otimes 1} & A \otimes K \cong A \\ & \searrow 1 & \downarrow \varepsilon \\ & & K \end{array}$$

Tenemos que (I) conmuta pues el siguiente diagrama conmuta:



(II) conmuta pues el siguiente diagrama conmuta:



Nuevamente esto es por def. de K -álgebra.

Ahora, para ver que $(V \otimes W) \otimes U$ es isomorfo a $V \otimes (W \otimes U)$ como A -módulo a izquierda utilizamos que ya existe un asociador en la categoría de K -módulos (que es una categoría monoidal) dado por

$$\alpha_{V,W,U}: (V \otimes W) \otimes U \xrightarrow{\sim} V \otimes (W \otimes U)$$

A priori este puede no ser un asociador de A -módulos a izquierda ya que falta ver que es A -lineal.

Para ver esto utilizamos la coasociatividad de A , es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \text{id} \otimes \Delta \\ A \otimes A & \xrightarrow{\Delta \otimes \text{id}} & (A \otimes A) \otimes A \cong A \otimes (A \otimes A) \end{array}$$

Como $(V \otimes W) \otimes U$ también es un $(A \otimes A) \otimes A$ módulo a izquierda con el morfismo $(\mu_V \otimes \mu_W) \otimes \mu_U$, $V \otimes (W \otimes U)$ es $A \otimes (A \otimes A)$ -módulo a izquierda con el morfismo $\mu_V \otimes (\mu_W \otimes \mu_U)$ y el diagrama anterior conmuta entonces tenemos que $\mu_V \otimes (\mu_W \otimes \mu_U) = \alpha_{V,W,U} \circ (\mu_V \otimes \mu_W) \otimes \mu_U$, lo que nos da lo que queríamos.

□

Finalmente, debemos ver que $V \otimes K$, V y $K \otimes V$ son isomorfos como A -módulos a izquierda. Nuevamente utilizamos que esto es cierto para K -módulos:

Tenemos un unitor a izquierda y un unitor a derecha, K -lineales, dados por:

$$\lambda_V: K \otimes V \rightarrow V, \quad \rho_V: V \otimes K \rightarrow V$$

Para ver que estos también son A -lineales utilizamos que el siguiente diagrama (comultiplicación) conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\
 \Delta \downarrow & \searrow \text{id} & \downarrow \text{id} \otimes \varepsilon \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} & K \otimes A \cong A \cong A \otimes K
 \end{array}$$

Tenemos que $V \otimes K$ también es $A \otimes K$ -módulo a izquierda según el morfismo $\mu_V \otimes \varepsilon$ y $K \otimes V$ es $K \otimes A$ -módulo a izquierda según $\varepsilon \otimes \mu_V$.

Como el diagrama anterior conmuta tenemos entonces que $\lambda_V \circ \varepsilon \otimes \mu_V = \mu_V$ y $\rho_V \circ \mu_V \otimes \varepsilon = \mu_V$, obteniendo el resultado deseado.

Flex

Referencia: Advanced Algebra, B. Pareigis
Caps. 2, 11, 12

Repositor