Entrega final Representaciones de grupos finitos

Gerónimo de León Ramírez

28 de noviembre de 2022

9.

Probar que si V es un módulo a izquierda sobre un álgebra de Hopf H, entonces V^* también lo es y la evaluación $ev : V^* \otimes V \longrightarrow \mathbb{K}$ es un morfismo de H-módulos a izquierda.
Para V de dimensión finita con base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, probar que la coevaluación $coev : \mathbb{K} \longrightarrow V \otimes V^*$ dada por $coev(1) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i^*$ está bien definida y es un morfismo de H-módulos a izquierda.

Recordar que $V^* = \{f : V \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ es } \mathbb{K}\text{-lineal}\}$.
Defino la acción de H en V^* como $(h \cdot f)(v) = f(S(h) \cdot v)$ donde S es la antípoda de H y la acción adentro es la que tenía V. Veamos que esto define a una acción tal que V^* es H módulo. Para esto, usamos que S es un antimorfismo, visto en el ejercicio 8. Llamemos e al vector neutro en H.

$$(e \cdot f)(v) = f(S(e) \cdot v) = f(e \cdot v) = f(v) \Longrightarrow e \cdot f = f \tag{1}$$

$$(hh')\cdot(f)(v) = f(S(hh')\cdot v) = f((S(h')S(h))\cdot v) = (h'\cdot f)(S(h)\cdot v) = (h\cdot(h'\cdot f))(v) \Longrightarrow (hh')\cdot f = h\cdot(h'\cdot f). \tag{2}$$

Obviamente es, además, $\mathbb{K}$-lineal.

Veamos ahora que la evaluación es un morfismo de H-módulos. Ya sabemos que es $\mathbb{K}-$lineal.
La acción de H en $V^* \otimes V$ está dada mediante el coproducto de H, esto es:

$$\begin{gathered} \Delta(h) = \textstyle\sum_i h_i^{(1)} \otimes h_i^{(2)} \\ h \cdot (f \otimes v) = \sum h_i^{(1)} \cdot f \otimes h_i^{(2)} \cdot v, \end{gathered} \tag{3}$$

y la acción en $\mathbb{K}$ está dada por

$$h \cdot \lambda = \varepsilon(h)\lambda. \tag{4}$$

Recordemos que la antípoda S hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[rr, "S\otimes Id"] & & H \otimes H \arrow[dr, "m"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbb{K} \arrow[rr, "\mu"] & & H \\
 & H \otimes H \arrow[rr, "Id\otimes S"] & & H \otimes H, \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

que quiere decir que $\sum S(h_i^{(1)})h_i^{(2)} = \mu \circ \varepsilon(h)$.

Por otro lado, como V es un H-módulo, tenemos que

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \otimes V \arrow[r, "\mu \otimes Id"] \arrow[dr, "\cong"'] & H \otimes V \arrow[d, "\bullet"] \\
 & V,
\end{tikzcd}$$

que nos dice que $\mu(\lambda) \cdot v = \lambda v$.
Usando estas dos observaciones, tenemos que:

$$ev(h \cdot (f \otimes v)) = \sum ev(h_i^{(1)} \cdot f \otimes h_i^{(2)} \cdot v) = \sum f(S(h_i^{(1)})h_i^{(2)} \cdot v) = f\left(\left(\sum S(h_i^{(1)})h_i^{(2)}\right) \cdot v\right) = f(\mu(\varepsilon(h)) \cdot v) \quad (5)$$

$$= f(\varepsilon(h)v) = \varepsilon(h)f(v) = \varepsilon(h)ev(f \otimes v) = h \cdot ev(f \otimes v)$$

y por lo tanto ev es un morfismo de H módulos.

Veamos ahora la seguna parte. Recordamos que dada una base $\{e_i\}$ de V, se define la base dual $\{e_i^*\}$ de V^* como $e_i^*(\sum \alpha_k e_k) = \alpha_k$, o sea, la indicatriz según el elemento de la base.

Observación 1. Para cualquier $f \in V^*$, se cumple que $f = \sum f(e_i)e_i^*$, y para cualquier $v \in V$, $v = \sum e_i^*(v)e_i$.

. Para ver que la coevalución *coev* está bien definida, tenemos que ver que no depende de la base elegida. Sea $\{b_1, , b_n\}$ otra base de V con su respectiva base dual $\{b_i^*\}$.
Usando lo visto en la observación para los b_i^* según la base $\{e_i\}$ y para los e_k según la base $\{b_i\}$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \otimes b_i^* = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes \left(\sum_{k=1}^{n} b_i^*(e_k)e_k^*\right) = \sum_{i,k=1}^{n} b_i \otimes b_i^*(e_k)e_i^* = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^*(e_k)b_i\right) \otimes e_i^* = \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes e_i^* \quad (6)$$

y por lo tanto $coev(1)$ vale lo mismo independientemente de la bse elegida.
Claramente $coev$ es $\mathbb{K}-$lineal. Veamos que preserva la acción de H.

$$coev(h \cdot 1) = coev(\varepsilon(h)) = \sum \varepsilon(h)e_i \otimes e_i^* = \sum e_i \otimes \varepsilon(h)e_i^* = \sum e_i \otimes S(h_j^{(1)}) \cdot (h_j^{(2)} \cdot e_i^*) \quad (7)$$

$$h \cdot coev(1) = \sum h \cdot e_i \otimes e_i^* = \sum h_j^{(1)} \cdot e_i \otimes h_j^{(2)} \cdot e_i^* \quad (8)$$