

ÁLGEBRA LINEAL NUMÉRICA 2022

GUÍA DE PREPARACIÓN DE EXAMEN ORAL

ABSTRACT. Este documento servirá de referencia para el examen oral del curso Algebra Lineal Numerica.

1. PREGUNTAS

- **Normas**
 - Definir normas de operador y Frobenius sobre sobre espacios de matrices, y mostrar propiedades y relaciones entre las mismas.
- **SVD**
 - Describir la descomposición en valores singulares de una matriz, y enunciar y demostrar la existencia de la misma. ¿Qué se puede decir de la unicidad?
 - ¿Cuál es la relación entre los valores singulares de una matriz y, la norma de operador de la matriz y su inversa (en caso de existir). ¿Y para la norma de Frobenius?
 - Utilizar la descomposición en valores singulares para describir el rango, imagen y núcleo, de una matriz.
- **Low rank approximation**
 - Introducir el problema y enunciar y demostrar el teorema asociado para la norma de operador.
- **Proyecciones**
 - Definir una proyección sobre un espacio vectorial y dar propiedades de la misma (descomposición en subespacios asociados a la proyección).
 - Definir proyecciones ortogonales. ¿Qué se puede decir de los subespacios imagen y núcleo? Probar que una proyección es ortogonal si y sólo si estos espacios son ortogonales.
 - ¿Cómo se expresa la proyección ortogonal sobre un subespacio generado por ciertos conjunto l.i. de vectores? Justificar.
- **Procesos de Ortogonalización**
 - Describir el proceso y algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt. ¿Qué se puede decir de la unicidad?
 - Describir el algoritmo *GS Modificado*, y el número de operaciones aritméticas.
 - Comentar sobre la *descomposición QR* y su unicidad, y su utilidad para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
 - Describir *triangularización Householder* y el algoritmo asociado.
- **Mínimos Cuadrados e inversa Moore-Penrose**
 - Introducir problema y comparar con interpolación con polinomios.
 - Describir solución y relacionarlo con la *inversa generalizada Moore-Penrose*. Estudiar propiedades de la inversa Moore-Penrose.

- Mostrar un algoritmo para la solución de mínimos cuadrados.
- Ver al problema de mínimos cuadrados como problema de optimización.
- **Condicionamiento**
 - Comentar sobre los distintos tipos de errores en análisis numérico.
 - Definir el número de condición para un problema computacional y mostrar algunos ejemplos de cálculo (en particular el caso de polinomios).
 - Mostrar ejemplos de problemas (inputs) mal condicionados.
 - ¿Qué dice el *teorema de número de condición*?. Dar una prueba del caso particular para matrices, i.e. el *Teorema de Eckart-Young*.
- **Aritmética del punto flotante**
 - Definir el conjunto $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ de *puntos flotantes* para base $\beta = 2$.
 - Dar algunas propiedades de \mathbb{F} . Por ejemplo cómo se distribuyen los puntos, distancia entre los mismos, máximo valor, y el más cercano a 0. ¿Cuál es el primer entero que no puede representarse exactamente?
 - Definir la función *redondeo* (ver página 83 de notas).
- **Estabilidad**
 - Comentar sobre qué se entiende por la *estabilidad* de un algoritmo, y qué es *backward-stability* (estabilidad inversa).
 - Muestra algún ejemplo de algoritmo *backward-stable*, y algún ejemplo que no lo sea.
 - Comentar que la condición de ser backward-stable no asegura tener precisión en el resultado, y que esto se manifiesta si el problema está mal condicionado. Enunciar y probar teorema sobre la precisión de algoritmos backward-stable (página 88, clase 26/10).
- **Eliminación Gaussiana, Factorización Cholesky**
 - Mostrar que el la eliminación gaussiana es un proceso de “triangularización triangular”
 - Definir y probar la existencia y unicidad de *factorización de Cholesky*.
- **Problema de valores propios**
 - Definir problema y comentar su dificultad via su relación con la *matriz compañera*.
 - Definir *factorización de Schur*
 - Mostrar como se realiza la *reducción de Hessenberg*.
 - Definir y motivar el *cociente de Rayleigh*.
 - Mostrar relación entre cociente de Rayleigh y valores propios.
 - Describir y comentar sobre el algoritmo del cociente de Rayleigh.