SOLUCION Parcial 2

Ej 1 90% Ej. 2 60%

1 a) El numero de orbitales con energía menor que ε es

$$N(\varepsilon) = \frac{2V}{h^3}\frac{4\pi}{3}\left(2m(\varepsilon + W)\right)^{3/2} \quad \text{dentro metal}$$

$$= \frac{2V'}{h^3}\frac{4\pi}{3}\left(2m\varepsilon\right)^{3/2} \quad \text{fuera metal}$$

$$D(\varepsilon) = \frac{dN}{d\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{2V}{h^3}\, 2\pi\,(2m)^{3/2}(\varepsilon+W)^{1/2} \\ \dfrac{2V'}{h^3}\, 2\pi\,(2m)^{3/2}\,\varepsilon^{1/2} \end{cases}$$

En temperatura cero los electrones en el metal estan en los N orbitales de mas baja energía, y $\mu = \varepsilon$ del orbital de mas alta energía que esta ocupado. Entonces

$$N = N(\mu) = \frac{2V}{h^3}\frac{4\pi}{3}\left(2m(\mu + W)\right)^{3/2}$$

$$\mu = -W + \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{h^2}{2m}$$

b) $\varepsilon_F = \mu + W \qquad \Phi = 0 - \mu = -\mu$

c) Fuera del metal

$$n = \frac{4\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}\,d\varepsilon$$

$$= 4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(k_BT)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}}}{e^x e^{\beta\Phi}+1}\,dx$$

$\beta\Phi = \Phi/\tau \gg 1$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\, n_Q\, e^{-\beta\Phi}\int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2\, n_Q\, e^{-\beta\Phi}$$

(2)

a) $$Z_{modo} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta h f n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \varepsilon n} = \frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon}} \qquad \varepsilon = hf$$

$$F_{modo} = k_B T \ln(1-e^{-\beta\varepsilon})$$

$$\langle E\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_{modo} = \frac{\partial}{\partial\beta}\ln(1-e^{-\beta\varepsilon})$$

$$= \frac{\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}}{1-e^{-\beta\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1}$$

$$\langle n\rangle = \frac{\langle E\rangle}{\varepsilon} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon}-1}$$

b) El numero de estados de una particula sin grados de libertad interna con momento lineal $\|\vec{p}\| < p$ es

$$\frac{4\pi}{3}p^3 V/h^3$$

Entonces el numero de modos EM con $\|\vec{p}\|<p$ es

$$\frac{8\pi}{3}p^3 V/h^3$$

Y el numero con energía $c\|\vec{p}\|$ menor que ε es

$$N(\varepsilon) = \frac{8\pi}{3}\frac{1}{(hc)^3} V\varepsilon^3$$

Entonces la densidad de modos es

$$D(\varepsilon) = \frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{8\pi}{(hc)^3} V \varepsilon^2$$

c) El numero total de fotones en volumen V a temperatura T es

$$N = \frac{8\pi}{(hc)^3} V \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{e^{\beta\varepsilon}-1}\,d\varepsilon = 8\pi\left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 V \int_0^{\infty}\frac{x^2}{e^x-1}\,dx$$

$$= 8\pi\left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 V\, 2\,\zeta(3)$$

$$n = 20{,}3\ K^{-3}\,cm^{-3}\,T^3.$$

Para radiacion cosmica de trasfondo $n = 411/cm^3$

d) $$F = \frac{8\pi}{(hc)^3} V \int_0^\infty F_{modo}\, \varepsilon^2\, d\varepsilon$$

$$= \frac{8\pi}{(hc)^3} V\, k_B T \int_0^\infty \ln\left(1 - e^{-\beta\varepsilon}\right) \varepsilon^2\, d\varepsilon$$

$$= \frac{8\pi}{(hc)^3} V (k_B T)^4 \int_0^\infty \ln\left(1 - e^{-x}\right) x^2\, dx$$

$$= -\frac{\pi^4}{45} \frac{8\pi}{(hc)^3} V (k_B T)^4$$

$$p = -\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_T = \frac{\pi^4}{45} \frac{8\pi}{(hc)^3} (k_B T)^4$$

$$S = -\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_V = \frac{\pi^4}{45} \frac{8\pi}{(hc)^3} V\, 4 k_B (k_B T)^3$$

$$= \frac{32}{45} \frac{\pi^5}{(hc)^3} V\, k_B (k_B T)^3$$

e) $$\frac{\sigma}{N} = \frac{\frac{\pi^4}{45} \cancel{\frac{8\pi}{(hc)^3}} \cancel{V}\, 4 \cancel{(k_B T)^3}}{\cancel{\frac{8\pi}{(hc)^3}} \cancel{(k_B T)^3} \cancel{V}\, 2\, \zeta(3)} = 2 \frac{\pi^4}{45} \frac{1}{\zeta(3)} = 4 \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} = 3{,}6016$$

f) $$\frac{pV}{N} = \frac{\frac{\pi^4}{45} \cancel{\frac{8\pi}{(hc)^3}} (k_B T)^{\cancel{4}} \cancel{V}}{\cancel{\frac{8\pi}{(hc)^3}} \cancel{(k_B T)^3} \cancel{V}\, 2\, \zeta(3)} = \frac{\frac{\pi^4}{45}}{2\zeta(3)} k_B T = \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} k_B T = 0{,}9004\, k_B T$$

g) La concentración de partículas es fijado por la temperatura. Entonces si $V \longrightarrow 2V$ $N \rightarrow 2N$. El numero de partículas aumenta por un factor 2