

Detectando un Fondo de Ondas Gravitacionales

La función de Hellings-Downs

Ilan Sabaj

19 de junio de 2024

¿De qué vamos a hablar hoy?

Motivación: qué implicaciones tiene la detección de un fondo de GW en el contexto de la cosmología

Herramientas: qué dispositivos experimentales y herramientas matemáticas podemos usar para detectarlo

Predicción teórica: deduciremos analíticamente la función de Hellings-Downs, la cual puede compararse con mediciones para evaluar la presencia del fondo

CMB vs GWB

El Fondo Cósmico de Microondas (CMB) provee una imagen del universo temprano, en el momento en el que los fotones dejaron de estar en equilibrio con la materia.

Desde este momento, estos fotones prácticamente no han interactuado con nada, y es por eso que el detectarlos y observarlos nos puede brindar tanta información del universo temprano.

Sin ser por el redshift cosmológico que experimentan, y por la reducción en densidad numérica de fotones también debida a la expansión del universo, **las propiedades de esta radiación se han mantenido iguales desde cuando fue producida.**

CMB vs GWB

Es por esto que hoy en día las observaciones del espectro del CMB coinciden aún perfectamente con el espectro de cuerpo negro. Fueron emitidos en equilibrio térmico, y mantuvieron su carácter en frecuencia.

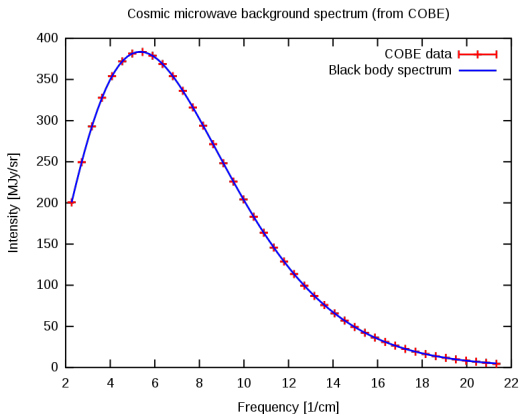


Figura: Espectro en frecuencia del CMB y comparación con el espectro de cuerpo negro a $T = 2,726 \text{ K}$

CMB vs GWB

Los fotones que conforman el CMB fueron emitidos en $t \approx 380,000$ años, en lo que se conoce como "last scattering".

Esto se da en el proceso de "recombinación", donde los electrones, protones y neutrones que formaban un plasma pasan a formar átomos.

Previo a la recombinación, los fotones interactuaban mediante scattering con electrones permanentemente. Se dice que " **el universo era opaco a la radiación electromagnética** " .

Luego, sólo algunos fotones conseguían interactuar con átomos, excitando sus electrones, por lo que la gran mayoría de los fotones del CMB han pasado todo este tiempo sin interactuar con nadie.

CMB vs GWB

En términos generales, para que una especie de partícula o perturbación esté en equilibrio, deben interactuar frecuentemente.

Podemos definir la tasa de interacción $\Gamma = 1/t_{int}$, donde t_{int} es el tiempo promedio entre interacciones para una partícula.

Si el universo cambia significativamente en un tiempo t_{int} , no tenemos equilibrio, y la especie se "desacopla".

La **condición para equilibrio** es entonces:

$$\Gamma \gg H$$

Con H el parámetro de Hubble.

CMB vs GWB

Para el scattering de Thomson en fotones, se tiene:

$$\Gamma = n_e \sigma_T c$$

Con n_e la densidad numérica de electrones y σ_T la "sección eficaz".

A partir de las dos ecuaciones anteriores es que puede calcularse el tiempo del last scattering.

Para la radiación gravitacional (GWs), la sección eficaz es muchísimo menor, y el mismo tipo de cálculos lleva a que las GWs se desacoplan en $t \approx 10^{-44} s$.

Esta diferencia tan grande de escala también implica una enorme diferencia en la dificultad de detectar GWs.

CMB vs GWB

Se desacoplan entonces también mucho antes que los neutrinos ($t \approx 1 s$), es decir que el GWB también podría preceder al CMB.

Es decir que **un GWB podría ser "una ventana" hacia el universo mucho más temprano que el CMB**, permitiendo obtener información sobre el estado y la situación del universo mucho antes del last scattering, y abriendo posibilidad también de hacer observaciones de física de muy altas energías.

Entonces la principal motivación para la búsqueda de un GWB es que **podría permitir estudiar el universo en una era inalcanzable por otros medios**.

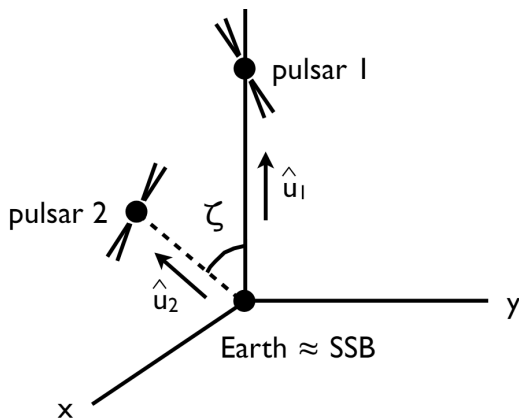
CMB vs GWB

En este contexto, estamos refiriéndonos a GWs en el orden de los nHz, que pueden ser producidas por fenómenos de muy gran escala.

Posibles fuentes incluyen:

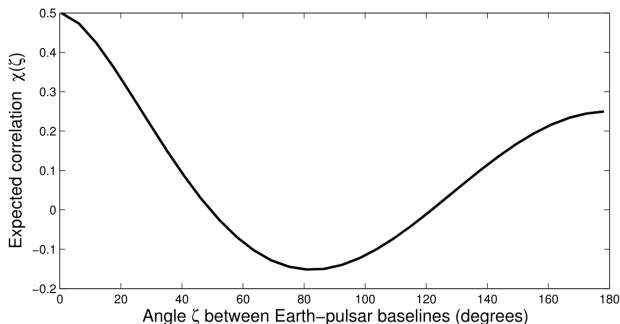
- ▶ Población de sistemas binarios de agujeros negros supermasivos (SMBHBs) (10^8 a $10^{10} M_{\odot}$)
- ▶ Ondas sonoras y turbulencias en el plasma primordial
- ▶ Transiciones de fase cosmológicas
- ▶ Decaimiento de defectos topológicos como "cuerdas cósmicas" o "paredes de dominio"
- ▶ Fluctuaciones cuánticas en la métrica (predichas por ciertas teorías de gravedad cuántica) amplificadas durante la etapa de inflación

La idea general



Idea: usar pares de señales de púlsares separados por un ángulo ζ y registrar variaciones en el tiempo causadas por GWs que influyen de manera específica a las dos señales según ζ .

La idea general



Idea: con un GWB estocástico e isotrópico, esta dependencia con ζ sigue una curva que es característica de este tipo de fondo y sistema de detección, la Función de Hellings-Downs:

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos \zeta}{2} \right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{1 - \cos \zeta}{2} \right) \ln \left(\frac{1 - \cos \zeta}{2} \right)$$

Campos Aleatorios y Correlación entre detectores

Calcular funciones tipo Hellings-Downs permite determinar la "firma de correlación" de una señal oculta en datos ruidosos.

Se dificulta si la señal está asociada a un campo aleatorio, como un fondo estocástico, intentando detectar "ruido en el ruido".

Aunque una señal de campo aleatorio puede ser indistinguible del ruido en un único detector, puede estar correlacionada entre pares de detectores de maneras que difieren del ruido instrumental.

Utilizando múltiples detectores, se aprovecha la influencia común del campo, que se distingue contra procesos de ruido no correlacionados.

Campos Aleatorios y Correlación entre detectores

En cada instante, la medición de correlación es el producto de las salidas de dos detectores.

Si los campos y el ruido instrumental son aleatorios, las correlaciones medidas fluctúan, pero al promediarlas en el tiempo, obtenemos una estimación de su valor esperado.

Éste puede calcularse también teóricamente, asumiendo la presencia o ausencia de la señal de interés.

Podemos luego comparar entre la predicción y las medidas, permitiendo confirmar la presencia de la señal en cuestión.

Campos Aleatorios y Correlación entre detectores

La forma más conveniente de describir estadísticamente estos campos es a través de una integral de Fourier cuyos coeficientes son variables aleatorias.

Las propiedades estadísticas del campo se codifican en las de los coeficientes de Fourier.

$$\tilde{\Phi}(t, \vec{x}) = \int d^3\vec{k} \tilde{A}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

$\tilde{A}(\vec{k})$ son las variables aleatorias que representan los coeficientes de Fourier, y $\omega/k = v$, la velocidad de la onda.

Campos Aleatorios y Correlación entre detectores

Asumiremos que el campo aleatorio es **isotrópico, estacionario en el tiempo y homogéneo en el espacio**. Esto implica que el valor esperado de la correlación del campo depende únicamente de la diferencia entre las coordenadas:

$$\langle \Phi(t_1, x_1) \Phi(t_2, x_2) \rangle = C(t_1 - t_2, x_1 - x_2)$$

Nos interesa calcular la correlación esperada $\langle r_1(t)r_2(t) \rangle$ de las respuestas $r_1(t)$, $r_2(t)$ de dos sistemas de recepción R_1, R_2 al campo $\Phi(t, \vec{x})$.

Campos Aleatorios y Correlación entre detectores

Dado que $\Phi(t, x)$ es un campo aleatorio, $r_1(t)$ y $r_2(t)$ serán funciones aleatorias de tiempo.

Dado que el campo es estacionario, $\langle r_1(t_1)r_2(t_2) \rangle$ depende solo de la diferencia de tiempo $t_1 - t_2$, por lo que $\langle r_1(t)r_2(t) \rangle$ será independiente del tiempo.

Esto permite estimarla promediando mediciones en diferentes instantes:

$$\langle r_1(t)r_2(t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_1(t_i)r_2(t_i)$$

Correlación entre componentes de Fourier de un campo estacionario

La correlación entre los componentes de Fourier $h(f)$ y $h(f')$ es:

$$\begin{aligned}\langle h^*(f)h(f') \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle h^*(t)h(t') \rangle e^{i2\pi ft} e^{-i2\pi f' t'} dt dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(t - t') e^{i2\pi ft} e^{-i2\pi f' t'} dt dt'\end{aligned}$$

Con un cambio de variables $u = t - t'$ y $v = t'$:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi fu} C(u) du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(f-f')v} dv = H(f)\delta(f - f')$$

Pulsar Timing Arrays

Existen muchos métodos para detectar GWs, que difieren en los rangos de frecuencia que son capaces de detectar. Uno de los principales son los **arreglos de mediciones de tiempo de púlsares (PTAs)**.

Las estrellas de neutrones radían rayos intensos de ondas de radio desde sus polos magnéticos.

Si sus polos magnéticos no están alineados con su eje de rotación, estos rayos salen disparados dando vueltas, **como los haces de luz de un faro**, y decimos que es un púlsar.

Pulsar Timing Arrays

Pulsar Timing Arrays

Dada su gran masa, su velocidad angular es muy constante, y por lo tanto los pulsos de ondas de radio nos **llegan a un período muy constante**.

Fluctuaciones en estos períodos pueden deberse a la presencia de GWs, que perturban las distancias en el camino púlsar-Tierra, implicando variaciones en la distancia que debe recorrer la luz para llegar, variando los tiempos de llegada (Time of Arrival / ToA).

Sus períodos de rotación incrementan debido a pérdida de energía por emisión de radiación.

Pulsar Timing Arrays

Por esto, interesan los llamados **Millisecond Pulsars (MSPs)**, cuyos períodos de rotación son menores a 10 ms , y además incrementan suficientemente lento: $\dot{P} < 10^{-19}\text{ s s}^{-1}$.

Actualmente se conocen más de 3000 púlsares, de los cuales unos 400 son MSPs.

Hay púlsares cuyos **períodos pueden medirse con precisión de $1\ \mu\text{s}$** y algunos hasta del orden **cientos de ns** .

Pulsar Timing Arrays

Midiendo los espaciados entre sus pulsos constantemente y con esta precisión, **a lo largo de 5 a 10 años, se pueden detectar GWs del orden de los nHz .**

Son estas observaciones de GWs del orden de nHz las que pueden brindar información acerca del universo temprano. Pueden deberse a fuentes muy primitivas, que emiten a bajas frecuencias, y que además han experimentado redshift cosmológico.

Hay varios órdenes de magnitud de diferencia con las frecuencias a las que son sensibles otra clase de detectores como LIGO y VIRGO, que pueden detectar GWs de entre 10 y $10^4 Hz$.

Comparación entre distintos tipos de fondo

La respuesta de los detectores 1 y 2 para el caso del sonido está dada por:

$$r_1(t) = V_A(t) - V_B(t) , \quad r_2(t) = V_A(t) - V_C(t)$$

Con

$$V_A(t) = Gp(\vec{x}_A, t) \text{ idem } B, C$$

Donde G es una ganancia del micrófono, y $p(\vec{x}_A, t)$ es el campo de perturbaciones de presión. Son micrófonos omnidireccionales.

En este caso, la dependencia con ζ del valor esperado de la correlación entre las respuestas de los dos detectores es nula. Es independiente de la distribución angular de los micrófonos.

Tenemos $\langle r_1^*(f)r_2(f') \rangle = \chi(\zeta)H(f)\delta(f - f') = F(f)$, es decir $\chi(\zeta) = cte$.

Comparación entre distintos tipos de fondo

La respuesta de los detectores 1 y 2 para el caso de ondas electromagnéticas está dada por:

$$r_1(t) = V_A(t) - V_B(t) , \quad r_2(t) = V'_A(t) - V_C(t) ,$$
$$\text{con } V_A(t) = \hat{u}_1 \cdot \vec{E}(\vec{x}_A, t) , \quad V_B(t) = \hat{u}_1 \cdot \vec{E}(\vec{x}_B, t)$$
$$V'_A(t) = \hat{u}_2 \cdot \vec{E}(\vec{x}_A, t) , \quad V_C(t) = \hat{u}_2 \cdot \vec{E}(\vec{x}_C, t)$$

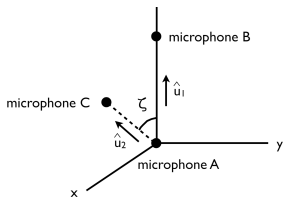
Donde $\hat{u}_{1,2}$ son las direcciones de las antenas y $\vec{E}(\vec{x}_A, t)$ es el campo eléctrico, son antenas dipolares.

En este caso, la dependencia con ζ del valor esperado de la correlación entre las respuestas de los dos detectores es:

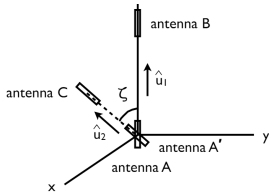
$$\langle r_1^*(f)r_2(f') \rangle = \chi(\zeta)H(f)\delta(f - f') , \quad \text{con } \chi(\zeta) = \frac{1}{3}\cos\zeta$$

Comparación entre distintos tipos de fondo

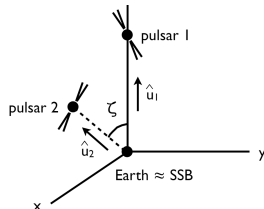
Vemos que la **dependencia angular del valor esperado de la correlación es algo muy característico de cada tipo de fondo estocástico** y de las respuestas de los detectores.



$$\chi(\zeta) = \text{cte}$$



$$\chi(\zeta) = \frac{1}{3} \cos \zeta$$



$$\chi(\zeta) =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos \zeta}{2} \right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{1 - \cos \zeta}{2} \right) \ln \left(\frac{1 - \cos \zeta}{2} \right)$$

Efecto de las Ondas Gravitacionales en las medidas de Tiempos de Púlsar

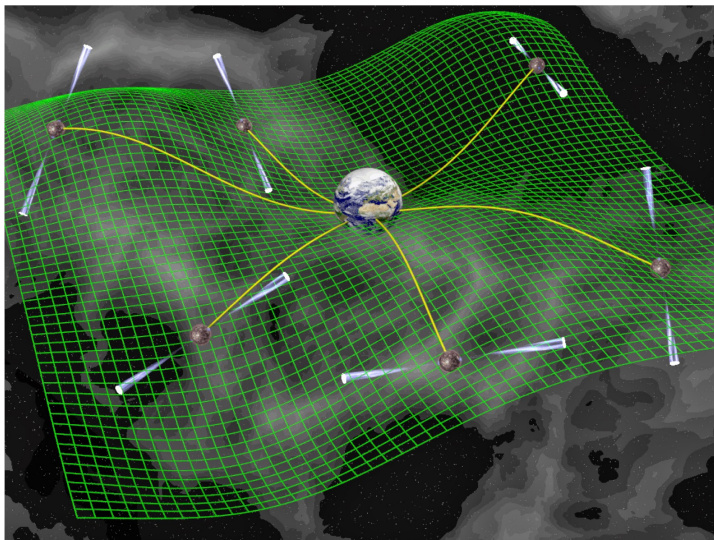
Las ondas gravitacionales afectan las mediciones de tiempo de púlsares **perturbando las geodésicas nulas por las que viajan las señales de radio emitidas desde un púlsar..** Veremos cómo influyen en la señal medida en los experimentos de tiempo de púlsar.

Una perturbación métrica en un calibre espacial transversal y sin traza tiene una expansión de onda plana dada por:

$$h_{ij}(t, \vec{x}) = \sum_A \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{S^2} d\hat{\Omega} e^{i2\pi f(t - \hat{\Omega} \cdot \vec{x})} h_A(f, \hat{\Omega}) e_{Aij}(\hat{\Omega})$$

Con f la frecuencia de las ondas gravitacionales y $\hat{\Omega}$ el vector unitario que apunta en la dirección de propagación de las ondas.

Efecto de las Ondas Gravitacionales en las medidas de Tiempos de Púlsar



Efecto de las Ondas Gravitacionales en las medidas de Tiempos de Púlsar

$A = +, \times$ indica las dos polarizaciones independientes, dadas por los tensores de polarización:

$$e_{ij}^+(\hat{\Omega}) = \hat{m}_i \hat{m}_j - \hat{n}_i \hat{n}_j$$

$$e_{ij}^\times(\hat{\Omega}) = \hat{m}_i \hat{n}_j + \hat{n}_i \hat{m}_j$$

Donde:

$$\hat{\Omega} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\hat{m} = (\sin \phi, -\cos \phi, 0)$$

$$\hat{n} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$$

Efecto de las Ondas Gravitacionales en las medidas de Tiempos de Púlsar

Vamos a trabajar con la diferencia de la perturbación en la Tierra y en el pulsar. Tomando únicamente la componente que se propaga según $\hat{\Omega}$:

$$\Delta h_{ij} = h_{ij}(t_p, \vec{x}_p, \hat{\Omega}) - h_{ij}(t_e, \vec{x}_e, \hat{\Omega})$$

Donde, en cada punto (t_0, \vec{x}_0) , la perturbación está descrita por:

$$h_{ij}(t_0, \vec{x}_0, \hat{\Omega}) = \sum_A \int_{-\infty}^{\infty} df e^{i2\pi f(t_0 - \hat{\Omega} \cdot \vec{x}_0)} h_A(f, \hat{\Omega}) e_{ij}^A(\hat{\Omega})$$

Esta diferencia nos permitirá calcular el **corrimiento en la frecuencia con la que los púlsares emiten pulsos que se observa desde la Tierra.**

Desarrollo de Δh_{ij} en nuestro Sistema de Coordenadas

Elegimos un sistema de coordenadas particular con la Tierra en el origen y el púlsar a una distancia L en la dirección \hat{p} , tal que:

$$t_p = t_e - L = t - L,$$

$$\vec{x}_e = 0,$$

$$\vec{x}_p = L\hat{p}$$

Si asumimos que la amplitud de la perturbación es la misma en la Tierra y en el pulsar, entonces podemos escribir Δh_{ij} en nuestro sistema de coordenadas como:

$$\Delta h_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} df e^{i2\pi ft} \left(e^{-i2\pi fL(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p})} - 1 \right) \sum_A h_A(f, \hat{\Omega}) e_{Aij}(\hat{\Omega}) = \Delta h_{ij}(t, \hat{\Omega})$$

Tomando su transformada de Fourier:

$$\tilde{\Delta h}_{ij}(f, \hat{\Omega}) = \left(e^{-i2\pi fL(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p})} - 1 \right) \sum_A h_A(f, \hat{\Omega}) e_{ij}^A(\hat{\Omega})$$

Derivación de la Fórmula de Detweiler para el Redshift Usando la Ecuación Geodésica

Deduciremos el corrimiento en la frecuencia de los pulsos de los púlsares producido por una onda gravitacional única con dirección fija $\hat{\Omega} = \hat{z}$ que atraviesa la línea desde el púlsar hacia la Tierra.

Escribimos la perturbación de la métrica como:

$$h_{ij}(t, \hat{\Omega} = \hat{z}) = \sum_A \int_{-\infty}^{\infty} df e^{i2\pi f(t-z)} h_A(f, \hat{z}) e_{ij}^A(\hat{z}) = h_{ij}(t-z)$$

Por lo que la métrica total queda:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}(t-z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & 1 - h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Derivación de la Fórmula de Detweiler para el Redshift Usando la Ecuación Geodésica

Si un vector s^a es nulo en Minkowski, el vector nulo correspondiente, σ^a , en el espacio-tiempo perturbado $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ es:

$$\sigma^a = s^a - \frac{1}{2}\eta^{ab}h_{bc}s^c$$

Para ver por qué, planteamos la condición de nulidad en el espacio-tiempo perturbado:

$$g_{ab}\sigma^a\sigma^b = (\eta_{ab} + h_{ab})\sigma^a\sigma^b = 0$$

Suponiendo que σ^a puede escribirse como s^a más una perturbación $\sigma^a = s^a + \delta s^a$, sustituimos:

$$\eta_{ab}(s^a + \delta s^a)(s^b + \delta s^b) + h_{ab}(s^a + \delta s^a)(s^b + \delta s^b) = 0$$

Derivación de la Fórmula de Detweiler para el Redshift Usando la Ecuación Geodésica

Quedámonos con los términos de primer orden y utilizando que s^a es nulo en Minkowski y que η_{ab} es simétrica:

$$\begin{aligned}\eta_{ab}s^a s^b + \eta_{ab}s^a \delta s^b + \eta_{ab}\delta s^a s^b + h_{ab}s^a s^b = \\ \eta_{ab}s^a \delta s^b + \eta_{ab}\delta s^a s^b + h_{ab}s^a s^b = 2\eta_{ab}s^a \delta s^b + h_{ab}s^a s^b = 0\end{aligned}$$

Resolviendo para δs^a :

$$\delta s^a = -\frac{1}{2}\eta^{ab}h_{bc}s^c$$

Por lo tanto, el vector nulo perturbado σ^a es:

$$\sigma^a = s^a - \frac{1}{2}\eta^{ab}h_{bc}s^c$$

Derivación de la Fórmula de Detweiler para el Redshift Usando la Ecuación Geodésica

El vector nulo en Minkowski que apunta del púlsar a la Tierra es:

$$s^a = \nu(1, -\alpha, -\beta, -\gamma)$$

con α , β , y γ los cosenos con respecto a las direcciones x , y , z . El vector perturbado correspondiente es:

$$\sigma^a = \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \left(1 - \frac{1}{2}h_+\right) + \frac{1}{2}\beta h_\times \\ -\beta \left(1 + \frac{1}{2}h_+\right) + \frac{1}{2}\alpha h_\times \\ -\gamma \end{pmatrix}$$

Derivación de la Fórmula de Detweiler para el Redshift Usando la Ecuación Geodésica

La ecuación geodésica nos dice que la componente t de σ^a satisface

$$\frac{d\sigma^t}{d\lambda} = -\Gamma_{ab}^t \sigma^a \sigma^b$$

Los símbolos de Christoffel se deducen a partir de la forma de la métrica perturbada:

$$\Gamma_{ab}^t = -\frac{1}{2}g^{tc} \left(\frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \right) = \frac{1}{2}\dot{g}_{ab} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{h}_+ & \dot{h}_\times & 0 \\ 0 & \dot{h}_\times & -\dot{h}_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Derivación de la Fórmula de Detweiler para el Redshift Usando la Ecuación Geodésica

La ecuación geodésica entonces nos dice:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma^t}{d\lambda} &= -\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\dot{g}_{ab}\sigma^a\sigma^b = -\frac{1}{2}\left[\dot{g}_{xx}(\sigma^x)^2 - \dot{g}_{yy}(\sigma^y)^2\right] - \dot{g}_{xy}\sigma^x\sigma^y \\ &= -\frac{1}{2}\dot{h}_+ [(\sigma^x)^2 - (\sigma^y)^2] - \dot{h}_\times\sigma^x\sigma^y\end{aligned}$$

A partir de la expresión para σ^a se deducen:

$$(\sigma^x)^2 - (\sigma^y)^2 = \nu^2(\alpha^2 - \beta^2) + O(h)$$

$$\sigma^x\sigma^y = \nu^2\alpha\beta + O(h)$$

Por lo tanto, tenemos:

$$-\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{1}{2}\dot{h}_+\nu^2(\alpha^2 - \beta^2) + \dot{h}_\times\nu^2\alpha\beta$$

Derivación de la Fórmula de Detweiler para el Redshift Usando la Ecuación Geodésica

Buscamos escribir las derivadas temporales en la ecuación anterior como derivadas con respecto al parámetro afín λ . Con $h_{+, \times} = h_{+, \times}(t - z)$, tenemos:

$$\frac{dh_{+, \times}}{d\lambda} = \frac{\partial h_{+, \times}}{\partial t} \frac{dt}{d\lambda} + \frac{\partial h_{+, \times}}{\partial z} \frac{dz}{d\lambda}$$

Tenemos además que:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \nu, \quad \frac{\partial h_{+, \times}}{\partial z} = -\frac{\partial h_{+, \times}}{\partial t}, \quad \text{y} \quad \frac{dz}{d\lambda} = -\nu\gamma$$

Por lo tanto, podemos reescribir la regla de la cadena como:

$$\dot{h}_{+, \times} = \frac{1}{\nu(1 + \gamma)} \frac{dh_{+, \times}}{d\lambda}.$$

Derivación de la Fórmula de Detweiler para el Redshift Usando la Ecuación Geodésica

Sustituyendo las expresiones para \dot{h}_+ y \dot{h}_\times en la ecuación geodésica:

$$-\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{1 + \gamma} \frac{dh_+}{d\lambda} + \frac{\alpha\beta}{1 + \gamma} \frac{dh_\times}{d\lambda}$$

Integrando, e ignorando la dependencia de los ángulos α y β con λ , ya que es de orden $O(h)$:

$$\frac{\nu(t)}{\nu_0} = \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{1 + \gamma} \Delta h_+ - \frac{\alpha\beta}{1 + \gamma} \Delta h_\times \right]$$

Donde $\Delta h_{+, \times} = h_{+, \times}^p - h_{+, \times}^e$ es la diferencia entre la perturbación en el púlsar y en la Tierra. Finalmente, expandiendo a primer orden en h_+ y h_\times y reordenando, obtenemos la fórmula de Detweiler:

$$\frac{\nu_0 - \nu(t)}{\nu_0} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{1 + \gamma} \Delta h_+ + \frac{\alpha\beta}{1 + \gamma} \Delta h_\times$$

Redshift por un fondo isotrópico

Ahora, demostraremos que el redshift total es la suma de las contribuciones de las ondas gravitacionales en cada dirección, es decir:

$$\tilde{z}(f) = \int_{S^2} d\hat{\Omega} \tilde{z}(f, \hat{\Omega})$$

Consideramos una perturbación métrica, h_{ab} compuesta por la suma de N perturbaciones $h_{ab}^{(i)}$ en direcciones $\hat{\Omega}^{(i)}$.

$$h_{ab} = \sum_{i=1}^N h_{ab}^{(i)}(t - \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x}),$$

donde t y \vec{x} forman un cuadrivector x_a en Minkowski.

Redshift por un fondo isotrópico

Con s^a el vector nulo en Minkowski:

$$s^a = \nu(1, -\alpha, -\beta, -\gamma) \equiv \nu(1, -\hat{p})$$

Escribimos el vector nulo perturbado por h_{ab} como:

$$\sigma^a = s^a + \delta s^a$$

La ecuación geodésica de interés para este vector:

$$\frac{d\sigma^t}{d\lambda} = -\Gamma_{ab}^t \sigma^a \sigma^b, \text{ con } \Gamma_{ab}^t = \frac{1}{2} \dot{g}_{ab} = \frac{1}{2} \dot{h}_{ab}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d\sigma^t}{d\lambda} = -\frac{1}{2} \dot{h}_{ab} \sigma^a \sigma^b \approx -\frac{1}{2} \dot{h}_{ab} s^a s^b = -\frac{1}{2} \dot{h}_{ij} \nu^2 \hat{p}^i \hat{p}^j$$

Redshift por un fondo isotrópico

Buscamos nuevamente escribir el lado derecho en términos de derivadas con respecto a λ .

$$\begin{aligned}\frac{dh_{ab}^{(i)}(t - \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x})}{d\lambda} &= \frac{\partial h_{ab}^{(i)}(t - \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x})}{\partial t} \frac{dt}{d\lambda} + \frac{\partial h_{ab}^{(i)}(t - \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x})}{\partial(\hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x})} \frac{d(\hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x})}{d\lambda} \\ &= \frac{\partial h_{ab}^{(i)}(t - \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x})}{\partial t} \nu - \frac{\partial h_{ab}^{(i)}(t - \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x})}{\partial t} (\hat{\Omega}^{(i)} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\lambda}) \\ &= \nu(1 + \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{p}) \frac{\partial h_{ab}^{(i)}(t - \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x})}{\partial t} = \nu(1 + \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{p}) \dot{h}_{ab}^{(i)}(t - \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x})\end{aligned}$$

Redshift por un fondo isotrópico

Es decir:

$$\dot{h}_{ab}^{(i)}(t - \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x}) = \frac{1}{\nu(1 + \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{p})} \frac{dh_{ab}^{(i)}(t - \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x})}{d\lambda}$$

Sustituyendo en

$$\frac{d\sigma^t}{d\lambda} = -\frac{1}{2} \dot{h}_{ij} \nu^2 \hat{p}^i \hat{p}^j$$

Hallamos

$$-\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{d\lambda} = \sum_{(i)} \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^i \hat{p}^j}{1 + \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \hat{p}} \frac{dh_{ij}^{(i)}(t - \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x})}{d\lambda}$$

Integrando:

$$\frac{\nu(t)}{\nu_0} = \exp \left[- \sum_{(i)} \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^i \hat{p}^j}{1 + \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \hat{p}} \Delta h_{ij}^{(i)}(t - \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x}) \right]$$

Redshift por un fondo isotrópico

Expandiendo a primer orden y reordenando, obtenemos el redshift:

$$z = \frac{\nu_0 - \nu(t)}{\nu_0} = \sum_{(i)} \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^i \hat{p}^j}{1 + \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \hat{p}} \Delta h_{ij}^{(i)}(t - \hat{\Omega}^{(i)} \cdot \vec{x})$$

Si dejamos que $\hat{\Omega}$ vaya en todas las direcciones posibles, la sumatoria pasa a ser una integral, quedando:

$$z = \int_{S^2} d\hat{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^i \hat{p}^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}} \Delta h_{ij}(t - \hat{\Omega} \cdot \vec{x})$$

Pasando a Fourier:

$$z(f) = \int_{S^2} d\hat{\Omega} \left(e^{-i2\pi f L(1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p})} - 1 \right) \sum_A h_A(f, \hat{\Omega}) e_{ij}^A(\hat{\Omega}) \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^i \hat{p}^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}}$$

Deducción de la función de Hellings-Downs

Ahora tenemos todo lo que necesitamos para deducir la expresión para la curva de Hellings-Downs.

Calcularemos la correlación entre el redshift observado para dos púlsares.

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{z}_1^*(f) \tilde{z}_2(f') \rangle = \\ & = \left\langle \int_{S^2} d\hat{\Omega} \left(e^{-i2\pi f L_1 (1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}_1)} - 1 \right) \sum_A h_A(f, \hat{\Omega}) e_{ij}^A(\hat{\Omega}) \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_1^i \hat{p}_1^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}_1} \right. \\ & \cdot \left. \int_{S^2} d\hat{\Omega}' \left(e^{-i2\pi f' L_2 (1 + \hat{\Omega}' \cdot \hat{p}_2)} - 1 \right) \sum_{A'} h_{A'}(f', \hat{\Omega}') e_{ij}^{A'}(\hat{\Omega}') \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_2^i \hat{p}_2^j}{1 + \hat{\Omega}' \cdot \hat{p}_2} \right\rangle = \end{aligned}$$

Deducción de la función de Hellings-Downs

Lo único estocástico son los coeficientes de Fourier de la perturbación:

$$\begin{aligned} &= \int_{S^2} d\hat{\Omega} \int_{S^2} d\hat{\Omega}' \left(e^{-i2\pi f L_1(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p}_1)} - 1 \right) \left(e^{-i2\pi f' L_2(1+\hat{\Omega}'\cdot\hat{p}_2)} - 1 \right) \\ &\sum_A \sum_{A'} \left\langle h_A^*(f, \hat{\Omega}) h_{A'}(f', \hat{\Omega}') \right\rangle e_{ij}^A(\hat{\Omega}) e_{ij}^{A'}(\hat{\Omega}') \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_1^i \hat{p}_1^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}_1} \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_2^i \hat{p}_2^j}{1 + \hat{\Omega}' \cdot \hat{p}_2} \end{aligned}$$

Imponemos que h es isotrópico, homogéneo, estacionario y no polarizado. Estas propiedades estadísticas implican que sólo perturbaciones de igual frecuencia, igual dirección de propagación, e igual polarización, presentan correlación. Es decir:

$$\langle h_A^*(f, \hat{\Omega}) h_{A'}(f', \hat{\Omega}') \rangle = \delta^2(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') \delta_{AA'} \delta(f - f') H(f)$$

Deducción de la función de Hellings-Downs

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} &= \int_{S^2} d\hat{\Omega} \int_{S^2} d\hat{\Omega}' \left(e^{-i2\pi f L_1(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p}_1)} - 1 \right) \left(e^{-i2\pi f' L_2(1+\hat{\Omega}'\cdot\hat{p}_2)} - 1 \right) \\ &\sum_A \sum_{A'} e_{ij}^A(\hat{\Omega}) e_{ij}^{A'}(\hat{\Omega}') \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_1^i \hat{p}_1^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}_1} \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_2^i \hat{p}_2^j}{1 + \hat{\Omega}' \cdot \hat{p}_2} \delta^2(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') \delta_{AA'} \delta(f - f') H(f) = \\ &= \int_{S^2} d\hat{\Omega} \left(e^{-i2\pi f L_1(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p}_1)} - 1 \right) \left(e^{-i2\pi f L_2(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p}_2)} - 1 \right) \\ &\sum_A e_{ij}^A(\hat{\Omega}) e_{ij}^A(\hat{\Omega}) \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_1^i \hat{p}_1^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}_1} \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_2^i \hat{p}_2^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}_2} \delta(f - f') H(f) \end{aligned}$$

Deducción de la función de Hellings-Downs

Estamos interesados en la parte geométrica de la correlación:

$$\Gamma(f) = \int_{S^2} d\hat{\Omega} \left(e^{-i2\pi f L_1(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p}_1)} - 1 \right) \left(e^{-i2\pi f L_2(1+\hat{\Omega}\cdot\hat{p}_2)} - 1 \right) \\ \sum_A e_{ij}^A(\hat{\Omega}) e_{ij}^A(\hat{\Omega}) \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_1^i \hat{p}_1^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}_1} \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_2^i \hat{p}_2^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}_2}$$

Veamos ahora que **las mediciones de PTAs trabajan en un régimen en el que podemos despreciar la contribución de los términos exponenciales**, y obtener una cantidad que no depende de f ni de las distancias L_1 y L_2 :

$$\Gamma_0 = \int_{S^2} d\hat{\Omega} \sum_A e_{ij}^A(\hat{\Omega}) e_{ij}^A(\hat{\Omega}) \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_1^i \hat{p}_1^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}_1} \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_2^i \hat{p}_2^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}_2}$$

Deducción de la función de Hellings-Downs

El gráfico muestra el resultado para la integral completa $\Gamma(fL)$ y la aproximada Γ_0 en el caso $L_1 = L_2 = L$, para distintos valores del ángulo entre los púlsares $\zeta = \cos^{-1}(\hat{\rho}_1 \cdot \hat{\rho}_2)$.

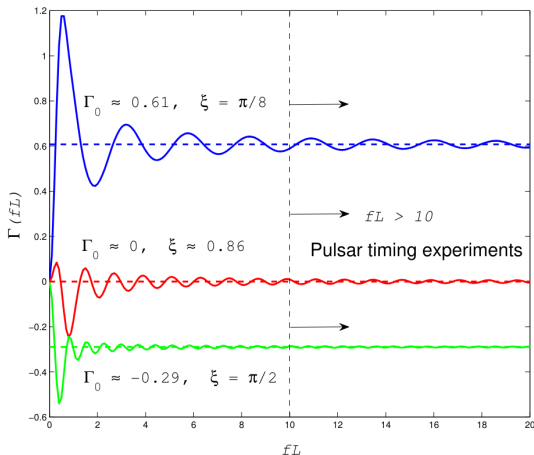


Figura: Dependencia con fL de $\Gamma(fL)$ y comparación con Γ_0 .

Deducción de la función de Hellings-Downs

Registrando mediciones en un período de 10 años, la frecuencia mínima que puede detectarse es $f_{\min} \approx 0,1\text{yr}^{-1}$.

Los púlsares más cercanos utilizados en PTAs se encuentran a una distancia de $L_{\min} \approx 100\text{ly}$.

Es decir que siempre se trabaja en el régimen $fL > 10$, por lo que Γ_0 aproxima muy bien a Γ .

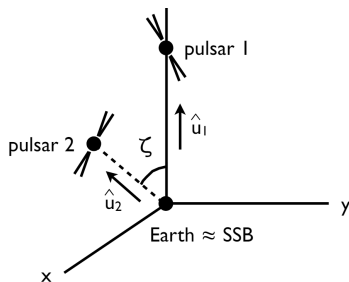
Esta integral es función única del ángulo ζ entre los púlsares. La denotamos $\chi(\zeta) = \Gamma_0$, tal que:

$$\langle \tilde{z}_1^*(f) \tilde{z}_2(f') \rangle = \chi(\zeta) \delta(f - f') H(f)$$

Y hemos obtenido una **cantidad puramente geométrica que caracteriza la correlación** entre pares de púlsares según el ángulo entre ellos.

Deducción de la función de Hellings-Downs

En el sistema de coordenadas de la figura:



Tenemos: $\hat{p}_1 = \hat{z}$ y $\hat{p}_2 = \sin\zeta\hat{x} + \cos\zeta\hat{z}$

Y con $\hat{\Omega} = \cos\theta\hat{z} + \sin\theta\sin\phi\hat{x} + \sin\theta\cos\phi\hat{y}$ se tiene:

$$\hat{\Omega} \cdot \hat{p}_1 = \cos\theta, \quad \hat{\Omega} \cdot \hat{p}_2 = \cos\zeta\cos\theta + \sin\zeta\sin\theta\cos\phi$$

Deducción de la función de Hellings-Downs

En estas coordenadas, los tensores de polarización están dados por:

$$e_{ij}^+(\hat{\Omega}) = \hat{m}_i \hat{m}_j - \hat{n}_i \hat{n}_j$$

$$e_{ij}^\times(\hat{\Omega}) = \hat{m}_i \hat{n}_j + \hat{n}_i \hat{m}_j$$

Con

$$\hat{m} = (\sin \phi, -\cos \phi, 0)$$

$$\hat{n} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$$

Por lo tanto tenemos:

$$e_{ij}^+(\hat{\Omega}) \hat{p}_1^i \hat{p}_1^j = \sin^2 \theta$$

$$e_{ij}^\times(\hat{\Omega}) \hat{p}_1^i \hat{p}_1^j = 0$$

$$e_{ij}^+(\hat{\Omega}) \hat{p}_2^i \hat{p}_2^j = (\sin \zeta \cos \theta \cos \phi - \cos \zeta \sin \theta)^2 - \sin^2 \zeta \sin^2 \phi$$

$$e_{ij}^\times(\hat{\Omega}) \hat{p}_2^i \hat{p}_2^j = -2(\sin \zeta \cos \theta \cos \phi - \cos \zeta \sin \theta) \sin \zeta \sin \phi$$

Deducción de la función de Hellings-Downs

Es decir que nos queda la siguiente integral:

$$\begin{aligned}\chi(\zeta) &= \int_{S^2} d\hat{\Omega} e_{ij}^+(\hat{\Omega}) e_{ij}^+(\hat{\Omega}) \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_1^i \hat{p}_1^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}_1} \frac{1}{2} \frac{\hat{p}_2^i \hat{p}_2^j}{1 + \hat{\Omega} \cdot \hat{p}_2} \\ &= \int_{S^2} \sin\theta d\theta d\phi \frac{1}{2} \frac{\sin^2\theta}{1 + \cos\theta} \frac{1}{2} \frac{(\sin\zeta \cos\theta \cos\phi - \cos\zeta \sin\theta)^2 - \sin^2\zeta \sin^2\phi}{1 + \cos\zeta \cos\theta + \sin\zeta \sin\theta \cos\phi}\end{aligned}$$

La cual puede resolverse utilizando integraciones de contorno, obteniendo finalmente la función de Hellings-Downs:

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos\zeta}{2} \right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{1 - \cos\zeta}{2} \right) \ln \left(\frac{1 - \cos\zeta}{2} \right)$$

Resultados actuales: Parkes PTA

PTA de varias instituciones en Australia y Nueva Zelanda. 30 MSPs a lo largo de 18 años.

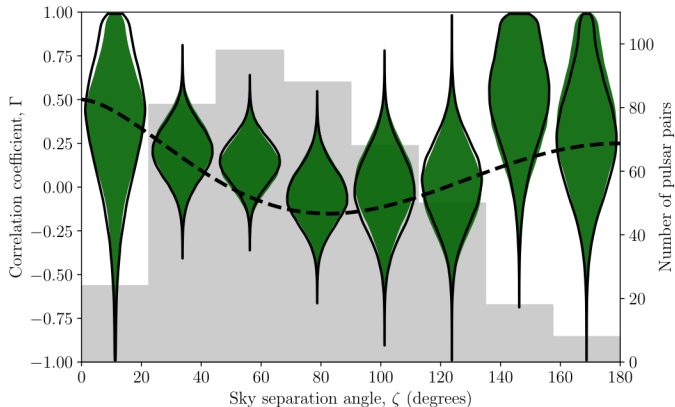


Figura: Mediciones del Parkes PTA y comparación con la curva HD.

Resultados actuales: European PTA

PTA de varias instituciones en Europa. 25 MSPs a lo largo de 24,7 años.

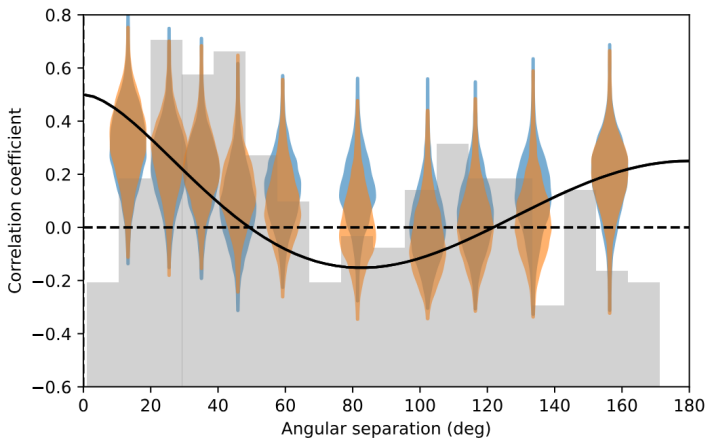


Figura: Mediciones del European PTA y comparación con la curva HD.

Planes a futuro

Se está llevando a cabo trabajo con el fin de:

- ▶ Mejorar la precisión de observaciones añadiendo más púlsares y mejorando los sistemas de detección
- ▶ Colaboración entre los distintos proyectos internacionales
- ▶ Desarrollar modelos más concretos sobre las posibles fuentes y establecer cotas en términos de densidad de energía y demás, para los diferentes candidatos

¡Muchas gracias!

Referencias

- ▶ Anholm et al. 2008, Optimal strategies for gravitational wave stochastic background searches in pulsar timing data.
- ▶ Jenet, Romano 2015, Understanding the gravitational-wave Hellings and Downs curve for pulsar timing arrays in terms of sound and electromagnetic waves
- ▶ Tong 2019, Cosmology
- ▶ Afzal et al. 2023, The NANOGrav 15 yr Data Set: Search for Signals from New Physics
- ▶ Maggiore 2000, Stochastic backgrounds of gravitational waves
- ▶ Maggiore 2000, Gravitational Wave Experiments and Early Universe Cosmology
- ▶ Antoniadis et al. 2023, The second data release from the European Pulsar Timing Array

Referencias

- ▶ Reardon et al. 2023, Search for an isotropic gravitational-wave background with the Parkes Pulsar Timing Array
- ▶ Agazie et al. 2023, The NANOGrav 15 yr Data Set: Observations and Timing of 68 Millisecond Pulsars
- ▶ Agazie et al. 2023, The NANOGrav 15 yr Data Set: Evidence for a Gravitational-wave Background
- ▶ Maorano et al. 2021, Principles of Gravitational-Wave Detection with Pulsar Timing Arrays