

Modelo de Press-Schechter y Halos de Materia Oscura

Jorge Ibañez

Instituto de Física, Facultad de Ciencias

Universidad de la República

Examen Cosmología

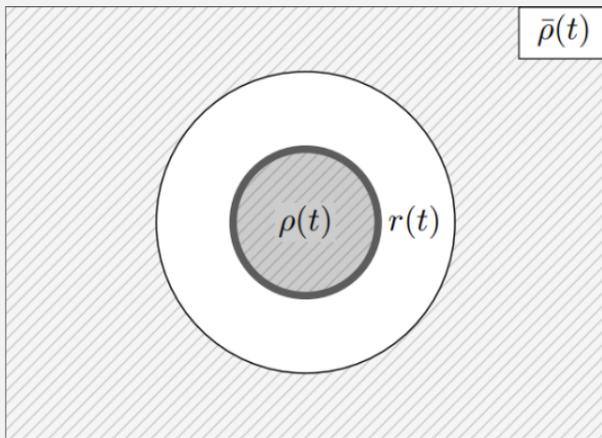
RESUMEN

El modelo de Press-Schechter permite calcular de manera aproximada la densidad numérica de halos de materia oscura en función de su masa y corrimiento al rojo a partir del colapso esférico y utilizando la aproximación lineal de fluctuaciones.

- Si bien se desconoce la naturaleza microscópica de la materia oscura, sus propiedades a gran escala son capturadas por una pequeña cantidad de parámetros, como la ecuación de estado y la velocidad de sonido.
- Podemos escribir las fluctuaciones de materia oscura utilizando ecuaciones de dinámica de fluidos. Describimos la evolución de las perturbaciones en un fluido no relativista en gravedad Newtoniana.
- Obtuvimos así una teoría lineal de perturbaciones la cual utilizamos para describir la evolución de las mismas en distintas etapas del universo.
- Si la amplitud de fluctuación de densidad es lo suficientemente grande, se desacoplará del crecimiento lineal y comenzará a crecer de forma no lineal, de manera similar al modelo de **colapso esférico**.

I. COLAPSO ESFÉRICO

Trabajaremos en el universo de Einstein-de Sitter, plano, compuesto por polvo con $\bar{\rho}(t) = \rho_{crit}(t)$. Consideramos cierta región esférica se comprime un radio $r_i < R_i$, por lo que:



Baumann, D. 2022

$$\rho_i = \bar{\rho}_i(1 + \delta_i)$$

Entre r_i y R_i tenemos un gap sin materia. La masa contenida en la región $r < r_i$ es:

$$M_i c^2 = \frac{4\pi}{3} R_i^3 \bar{\rho}_i = \frac{4\pi}{3} r_i^3 \rho_i = \frac{4\pi}{3} r_i^3 \bar{\rho}_i (1 + \delta_i)$$

Tenemos que M_i permanece constante en el tiempo mientras que las otras variables, $\bar{\rho}$ y δ evolucionan.

I. COLAPSO ESFÉRICO

Aplicando conservación de energía para una partícula

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM(r)}{r}$$

Para $r(t_i) \geq R_i$ y $E=0$

$$\dot{r}^2 = \frac{2GM(r)}{r} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

$$\int \sqrt{2GM(r)} dt = \int r^{1/2} dr$$

$$\sqrt{2GM(r)} t = \frac{2}{3} r^{3/2}$$

$$r(t) = \left(\frac{9GM(r)}{2}\right)^{1/3} t^{2/3}$$

Ahora, sustituyendo en la densidad promedio

$$\bar{\rho}(t) = \frac{M(r)c^2}{\left(\frac{4\pi}{3}\right)r^3(t)} = \frac{c}{6\pi G} \frac{1}{t^2} \quad (1)$$

Para $r(t_i) \leq R_i$, tenemos $E < 0$, lo cual actúa como universo con curvatura positiva $k=+1$.

$$r(\tilde{\tau}) = A(1 - \cos\tilde{\tau})$$

$$t(\tilde{\tau}) = B(\tilde{\tau} - \sin\tilde{\tau})$$

I. COLAPSO ESFÉRICO

En donde $A = \frac{GM}{2|E|}$, $B = \frac{GM}{(2|E|)^{3/2}}$, $A^3 = GMB^2$.

Expandimos para tiempos tempranos ($\tilde{\tau} \ll 1$):

$$r(\tilde{\tau}) \approx \frac{1}{2}A\tilde{\tau}^2$$

$$t(\tilde{\tau}) \approx \frac{1}{6}B\tilde{\tau}^3$$

Ahora, sustituyendo en $\rho(\tilde{\tau})$ y $\bar{\rho}(\tilde{\tau})$:

$$\rho(\tilde{\tau}) = \frac{M_i c^2}{(4\pi/3)r^3} = \frac{3M_i c^2}{4\pi A^3} \frac{1}{(1 - \cos\tilde{\tau})^3}$$

$$\bar{\rho}(\tilde{\tau}) = \frac{c}{6\pi G t^2} = \frac{c^2}{6\pi G B^2} \frac{1}{(\tilde{\tau} - \sin\tilde{\tau})^2}$$

Podemos obtener el contraste de densidad $\delta = \delta\rho/\bar{\rho}$

$$(1 + \delta) = \frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{9}{2} \frac{(\tilde{\tau} - \sin\tilde{\tau})^2}{(1 - \cos\tilde{\tau})^3} \quad (2)$$

Expandimos: $\tilde{\tau} - \sin\tilde{\tau} \approx \frac{1}{3!}\tilde{\tau}^3 - \frac{1}{5!}\tilde{\tau}^5$ y $1 - \cos\tilde{\tau} \approx \frac{1}{2}\tilde{\tau}^2 - \frac{1}{4!}\tilde{\tau}^4$:

$$1 + \delta_{lin}(\tilde{\tau}) \approx \frac{(1 - \frac{1}{20}\tilde{\tau}^2)^2}{(1 - \frac{1}{12}\tilde{\tau}^2)^3} \approx 1 + \frac{3}{20}\tilde{\tau}^2$$

Ahora, utilizando $t(\tilde{\tau})$ y $t_{col} = 2t_{turn} = 2B\pi$

$\delta_{lin}(t_{col}) \approx 1.69$

(3)

De manera más general se puede demostrar que para colapsar $\delta_c \geq \delta_{lim}(1 + z)$

I. VIRIALIZACIÓN Y HALOS DE MATERIA OSCURA

El simple colapso esférico predice que una sobre densidad termina como un agujero negro. Al tener en cuenta la energía cinética y el balance de esta con la potencial, obtenemos un **halo de materia oscura**. Para sistema virializado tenemos:

$$\bar{T} = -\frac{1}{2}\bar{V}$$

Comenzando una partícula en el punto turn-around,
T=0:

$$V_{turn} = -\frac{GM}{r_{turn}}$$

Aplicando conservación de energía antes y después de la virialización

$$T_{vir} + V_{vir} = \frac{1}{2}V_{vir} = V_{turn} \Rightarrow \begin{cases} r_{vir} = \frac{1}{2}r_{turn} \\ \rho_{vir} = 8\rho_{turn} \end{cases}$$

Tomamos $t_{vir} = t_{col} = 2t_{turn}$ y utilizamos la ecuación (1):

$$\bar{\rho} \propto 1/t^2 \Rightarrow \bar{\rho}_{vir} = \bar{\rho}_{turn}/4$$

$$\delta_{vir} = \frac{\rho_{vir}}{\bar{\rho}_{vir}} - 1 = 32 \frac{\rho_{turn}}{\bar{\rho}_{turn}} - 1$$

Utilizando ecuación (2) y $\tilde{\tau}_{turn} = \pi$, obtenemos:

$$\delta_{vir} \approx 177$$

(4)

II. FUNCIÓN VENTANA Y DISTRIBUCIÓN DE MASA

Introduciremos un suavizado del campo de densidad evolucionado linealmente. Denotamos al filtrado

$$\delta_R(\mathbf{x}) \equiv \delta(\mathbf{x}, R)$$

$$\delta_R(t, \mathbf{x}) = \int W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', R) \delta(t, \mathbf{x}') d^3x'$$

La elección de la función ventana no es única.

Trabajaremos con la función top-hat:

$$W(r, R) = \frac{3}{4\pi R^3} \times \begin{cases} 1 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

En el espacio de Fourier:

$$W(k, R) = \frac{3}{(kR)^3} [\sin(kR) - kR \cos(kR)]$$

Veamos la distribución de masa contenida dicha esfera

$$\bar{M}(R) = \frac{V_R}{c^2} \int d^3x W(\mathbf{x}, R) \bar{\rho}(\mathbf{x})$$

El contraste de densidad suavizado

$$\delta(\mathbf{x}, R) = \frac{\delta M(\mathbf{x}, R)}{\bar{M}(R)}$$

II. FUNCIÓN VENTANA Y DISTRIBUCIÓN DE MASA

La varianza de la distribución de masa suavizada

$$\sigma^2(M) = \langle \delta^2(\mathbf{x}, R) \rangle$$

La función de correlación de dos puntos

$$\langle \delta(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}'') \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-\mathbf{k}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')} P(k)$$

Utilizando la densidad filtrada

$$\begin{aligned} \sigma^2(M) &= \int d^3 x' d^3 x'' W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', R) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'', R) \langle \delta(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}'') \rangle \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} P(k) \int d^3 x' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} W_R(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int d^3 x'' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}''} W_R(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |\tilde{W}_R(k)|^2 P(k) \\ &= \int \frac{dk}{(2\pi)^3} (4\pi^2 k^2) |\tilde{W}_R(k)|^2 P(k) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 |\tilde{W}_R(k)|^2 P(k) \end{aligned}$$

II. FUNCIÓN VENTANA Y DISTRIBUCIÓN DE MASA

Podemos reescribir la expresión anterior como:

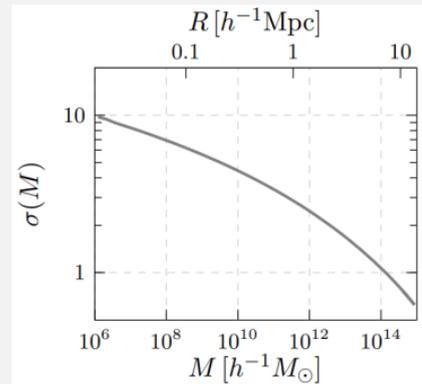
$$\sigma^2(t, R) = \langle \delta_R^2(x) \rangle = \int d \ln k \Delta_{lin}^2(k) |W(k, R)|^2$$

Δ_{lin} : Espectro de potencia adimensional del campo de densidad evolucionado linealmente

$$\Delta_{lin}^2(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_{lin}(k)$$

Sustituyendo el espectro de potencia $P(k) \sim k^n$

$$\begin{aligned} \sigma^2(M) &\sim \int dk k^2 k^n \sim \int_0^{1/R} dk k^{2+n} \\ &\sim \frac{1}{R^{3+n}} \sim \frac{1}{M^{(n+3)/3}} \end{aligned}$$



Creada a partir del modelo estándar cosmológico Λ CDM, asumiendo $P \sim k$. Baumann, D. 2022

II. FUNCIÓN VENTANA Y DISTRIBUCIÓN DE MASA

Como vemos que $\sigma(M)$ decrece para el modelo cosmológico Λ CDM, las fluctuaciones a pequeña escala son las primeras en colapsar. Formación de estructuras **“de abajo hacia arriba”**.

En modelos de materia oscura caliente la estructura se forma **“de arriba hacia abajo”**.

Observamos que $\sigma(M) \rightarrow \infty$ cuando $R \rightarrow 0$ y la densidad crítica de colapso es independiente de R . Por lo que todos los objetos colapsaran en alguna escala pequeña cuando alcancen el umbral necesario.

Observacionalmente se mide el parámetro fundamental

$$\sigma_8 = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 |\tilde{W}_R(k)|^2 P(k)$$

Utilizando a \tilde{W} como función ventana. Una escala $R=8h^{-1}$ Mpc, en donde los cúmulos son abundantes.

Se utiliza para caracterizar la normalización del espectro de potencia.

Mayores valores de σ_8 significa más fluctuaciones, por lo que la formación de estructuras comenzó antes.

El valor actual medido es $\sigma_8 \approx 0.8$

III. FUNCIÓN DE MASA

Veamos cual es el número de halos en un cierto rango de masa. Sea el número de halos con cierta masa M , posición \mathbf{x} tiempo t y su valor promedio:

$$n_h(t, \mathbf{x}, M)$$

$$\bar{n}_h(t, M) \equiv \langle n_h(t, \mathbf{x}, M) \rangle$$

Supondremos que la densidad suavizada es un campo aleatorio gaussiano. La probabilidad de que una región del espacio tenga una sobredensidad δM viene dada por

$$\mathbb{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(M)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\delta_M^2}{\sigma^2(M)}} \quad (5)$$

La probabilidad de que una región exceda la densidad crítica δ_c

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\delta_M > \delta_c) &= \int_{\delta_c}^{\infty} d\delta_M \mathbb{P}(\delta_M) \\ &= \int_{\nu}^{\infty} dx e^{-x^2/2} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\nu}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

$\nu(M) \equiv \frac{\delta_c}{\sigma(M)}$: peak height

$\operatorname{erfc}(x)$: función de error complementaria

Press y Schechter resolvieron el **problema de nube en nube** al multiplicar por un factor de dos: $\tilde{\mathbb{P}} = 2\mathbb{P}$

III. FUNCIÓN DE MASA

Veamos ahora, utilizando 5, la probabilidad de que se forme un halo en el rango $[M, M + dM]$

$$P([M, M + dM]) = |\tilde{\mathbb{P}}(\delta_{M+dM} > \delta_c) - \tilde{\mathbb{P}}(\delta_M > \delta_c)| \approx -\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{dM}$$

La abundancia de halos de masa M , llamada **función de masa**, se obtiene multiplicando la ecuación anterior por la densidad numérica máxima de dichos halos en una región de densidad media $\bar{\rho}$:

$$\frac{dn_h}{dM} = -\frac{\bar{\rho}}{M} \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{dM} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \nu e^{-\frac{\nu^2}{2}} \frac{\bar{\rho}}{M^2} \frac{d \ln \sigma}{d \ln M} \quad (6)$$

Para masa pequeña (ν pequeño), la función de masa es una ley de potencia. Para masa grande (ν grande), tiene una caída exponencial. Llamamos **multiplicidad de halo** $f_{PS}(\nu)$ y da la fracción de masa asociada a los halos en cierto rango de masas:

$$f_{PS}(\nu) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \nu e^{-\frac{\nu^2}{2}} \quad (7)$$

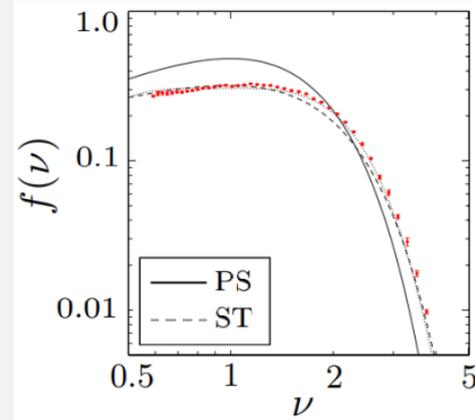
III. FUNCIÓN DE MASA

Aunque la función de masa Press-Schechter captura características cualitativas esenciales de la formación de halos, no está de acuerdo con los resultados de simulaciones de N-cuerpos a nivel cualitativo.

Sheth and Tormen, inspirados en dicha función de masa, propusieron que una función de masa que podría ajustar de mejor manera los datos de simulaciones de N-cuerpos es:

$$f_{ST}(\nu) \equiv A \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + (a\nu^2)^{-p}) \sqrt{a\nu^2} e^{-a\frac{\nu^2}{2}}$$

$$f_{PS}(\nu) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \nu e^{-\frac{\nu^2}{2}}$$



Fracción de masa colapsada y datos de simulación. Imagen creada a partir de Baumann, D. 2022 y Andrew R. Zentner, 2006

IV. BIASING

La función de masa nos dice cuántos halos de cierta masa M debemos esperar en cierto volumen. Ahora buscamos determinar cómo se distribuyen estos halos en dicho volumen

Buscamos hallar correlaciones en las posiciones del halo. Estas correlaciones se heredan de las correlaciones de la densidad primordial.

Definimos al contraste de densidad de halos

$$\delta_h(\mathbf{x}, M) \equiv \frac{n_h(\mathbf{x}, M) - \bar{n}_h(M)}{\bar{n}_h(M)}$$

Función de correlación de dos puntos:

$$\xi_{hh}(\mathbf{r}, M) = \langle \delta_h(\mathbf{x}, M) \delta_h(\mathbf{x} + \mathbf{r}, M) \rangle$$

Nuestro objetivo es relacionar ξ_{hh} con la función de dos puntos del campo de densidad lineal ξ_{lin} . La forma más sencilla es con la división de picos de fondo “**peak background split**”.

Separaremos la perturbación de densidad en longitud de onda corta (**peak**) δ_h , y otra parte en longitud de onda larga (**background**) δ_b :

$$\delta = \delta_h + \delta_b$$

IV. BIASING

Los picos formarán halos, las fluctuaciones de longitud de onda larga modularán las condiciones locales para la formación del halo.

Como $\delta_b \ll 1$, podemos tratarlo con la teoría lineal. Podemos suponer que δ_b es constante a escalas de formación de halo δ_h .

Las perturbaciones de longitud de onda larga afecta la formación del halo de las siguientes dos maneras:

- Cambia la densidad de fondo vista por los picos

$$\bar{\rho}' = \bar{\rho}(1 + \delta_b)$$

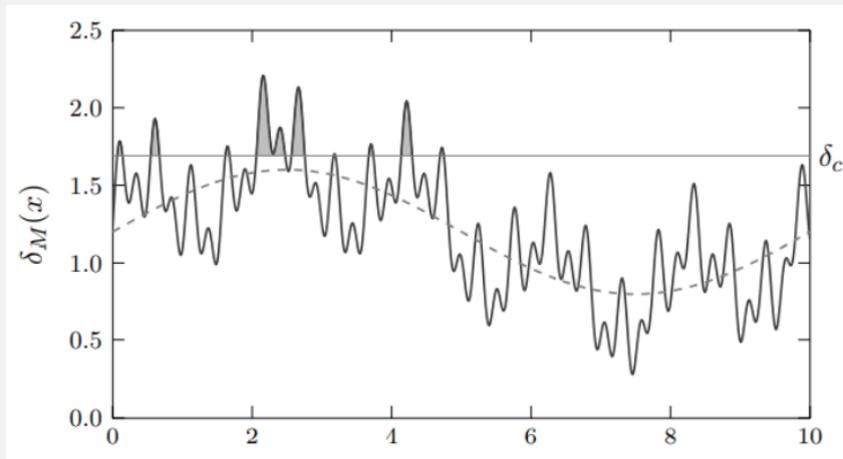
- Perturba el umbral de colapso del halo. La parte lineal de δ_h ahora forma un halo cuando alcanza el umbral efectivo

$$\delta_c' = \delta_c - \delta_b$$

Dado que el umbral efectivo δ_c' depende del valor de la fluctuación de longitud de onda larga δ_b , la densidad numérica local de halos se modula por el campo δ_b .

Las regiones donde $\delta_b > 0$ formará halos antes que las regiones con $\delta_b < 0$.

IV. BIASING



Baumann, D. 2022

Expandiendo la función de masa a orden lineal en δ_b :

$$\frac{dn_h}{dM}(\delta_b) = \frac{d\bar{n}_h}{dM} + \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\rho}'} \left(\frac{d\bar{n}_h}{dM} \right) \frac{d\bar{\rho}'}{d\delta_b} + \frac{\partial}{\partial \delta_c'} \left(\frac{d\bar{n}_h}{dM} \right) \frac{d\delta_c'}{d\delta_c} \right] \delta_b$$

IV. BIASING

$$\frac{dn_h}{dM}(\delta_b) = \frac{d\bar{n}_h}{dM} + \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\rho}'} \left(\frac{d\bar{n}_h}{dM} \right) \frac{d\bar{\rho}'}{d\delta_b} + \frac{\partial}{\partial \delta'_c} \left(\frac{d\bar{n}_h}{dM} \right) \frac{d\delta'_c}{d\delta_c} \right] \delta_b = \frac{d\bar{n}_h}{dM} \left[1 + \left(\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}'} \ln \left(\frac{d\bar{n}_h}{dM} \right) - \frac{\partial}{\partial \delta'_c} \ln \left(\frac{d\bar{n}_h}{dM} \right) \right) \delta_b \right]$$

Utilizamos la función de masa tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}'} \ln \left(\frac{d\bar{n}_h}{dM} \right) &= \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}'} = \frac{1}{1 + \delta_b} \approx 1 \\ -\frac{\partial}{\partial \delta'_c} \ln \left(\frac{d\bar{n}_h}{dM} \right) &= -\frac{1}{\sigma(M)} \frac{d \ln f(\nu)}{d\nu} = \frac{\nu^2 - 1}{\delta_c} \end{aligned}$$

Sustituyendo y utilizamos a definición de $f(\nu)$

$$\frac{dn_h}{dM}(\delta_b) = \frac{d\bar{n}_h}{dM} \left[1 + \left(1 + \frac{\nu^2 - 1}{\delta_c} \right) \delta_b \right] \quad (8)$$

Sustituyendo en la definición $\delta_h(\mathbf{x}, M)$

$$\delta_h(\mathbf{x}, M) \equiv \frac{n_h(\mathbf{x}, M) - \bar{n}_h(M)}{\bar{n}_h(M)}$$

Obtenemos:

$$\delta_h(\mathbf{x}, M) = \left(1 + \frac{\nu^2 - 1}{\delta_c} \right) \delta_b$$

El factor que relaciona δ_h y δ_b se llama **linear bias**

$$b_{PS}(\nu) = 1 + \frac{\nu^2 - 1}{\delta_c}$$

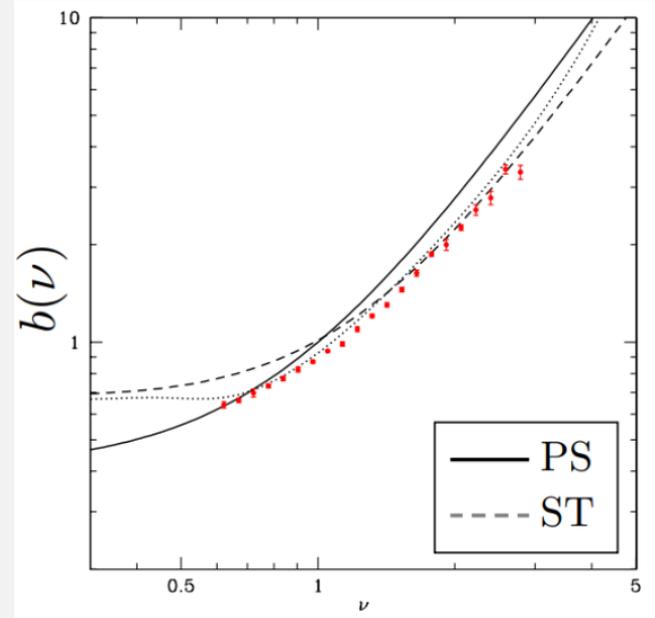
IV. BIASING

Repitiendo el procedimiento para la función de Sheth-Tormen encontramos:

$$b_{ST}(\nu) = 1 + \frac{a\nu^2 - 1}{\delta_c} + \frac{2p}{\delta_c[1 + (a\nu^2)^p]}$$

$$b_{PS}(\nu) = 1 + \frac{\nu^2 - 1}{\delta_c}$$

Este resultado se aplica a escalas en las que el modo de longitud de onda larga puede tratarse con la teoría lineal, de modo que la ecuación (8) es buena aproximación.



Bias PS, ST y datos de simulación. Imagen creada a partir de D. Baumann, 2022 y Andrew R. Zentner, 2006.

IV. BIASING

Podemos reescribir la función de correlación utilizando la relación

$$\delta_h(\mathbf{x}, M) = b(\nu)\delta_b$$

Y obtenemos

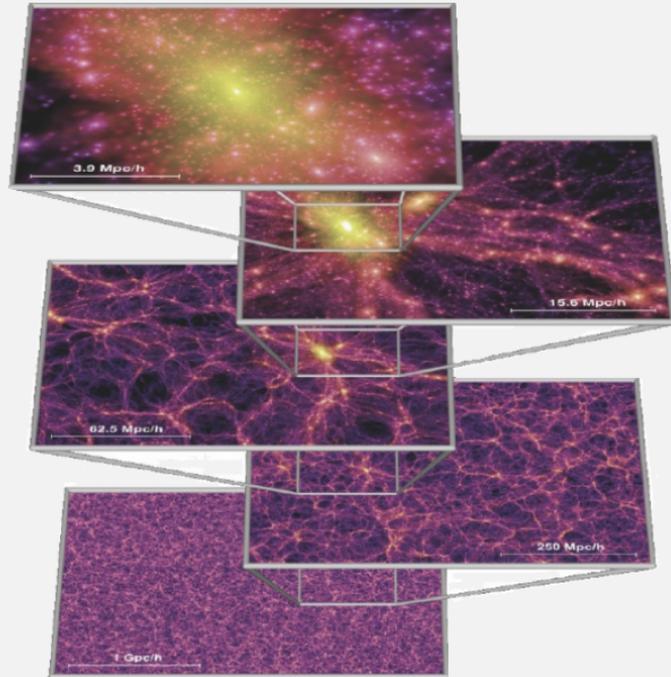
$$\xi_{hh}(r, M) = b^2(M) \xi_{lin}(r)$$

Donde $\xi_{lin}(r)$ es la función de correlación de dos puntos predicha por la teoría de perturbación lineal. Dado que $b(M)$ es una función monótonamente creciente, el sesgo es más fuerte para halos más masivos.

Debido a que las galaxias se forman dentro de halos de materia oscura, las correlaciones de los halos están vinculadas con las correlaciones de galaxias observadas ξ_{gg} .

Decimos que los halos de materia oscura son “trazadores sesgados” (**biased tracers**) del campo de densidad subyacente.

V. COMPARACIÓN CON SIMULACIONES NUMÉRICAS Y OBSERVACIONES



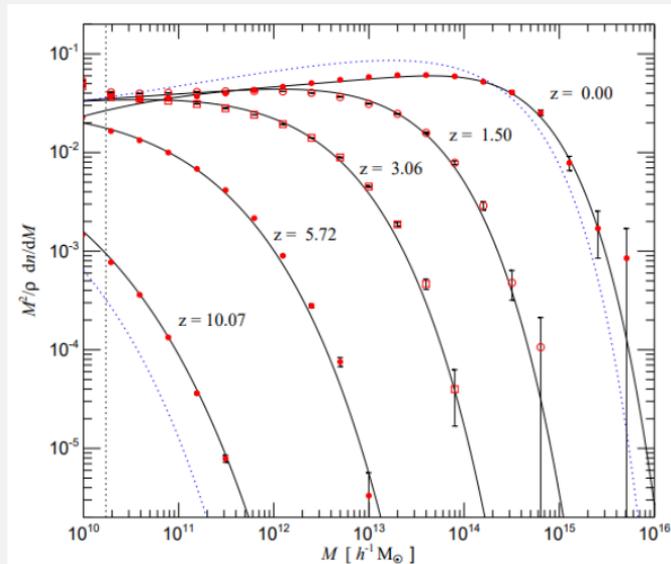
Schneider, 2006

Desde la publicación del modelo en 1973 hasta finales de los 90's, los resultados de las simulaciones estuvieron de acuerdo con el modelo Press-Schechter.

Actualmente las simulaciones son lo suficientemente precisas como para encontrar discrepancias con dicho modelo.

The Millennium Run utilizó más de 10^{10} partículas con una masa de $10^9 M_{\odot}$ para estudiar la evolución de la distribución de materia en una región del Universo.

V. COMPARACIÓN CON SIMULACIONES NUMÉRICAS Y OBSERVACIONES



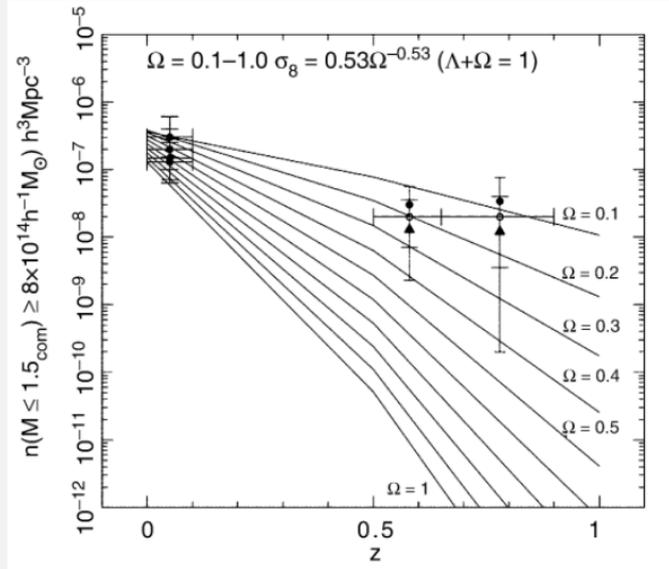
Springel, V. et al. 2005

Multiplicidad de halo como función de la masa. Las líneas continuas son ajustes analíticos para distintos z y las punteadas el modelo Press-Schechter.

Para valores pequeños de z , la función de masa de PS subestima la abundancia de halos muy masivos y sobreestima la densidad de halos de menor masa.

Para valores mayores, la función de masa PS se aleja de las simulaciones.

V. COMPARACIÓN CON SIMULACIONES NUMÉRICAS Y OBSERVACIONES



Schneider, P. 2006

Densidad numérica (comóvil) de cúmulos de galaxias con masa $M > 8 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$ y radio $R < 1.5 h^{-1}$ Mpc.

Las curvas son los valores esperados según el modelo de Press-Schechter para distintos valores de Ω . Los puntos los cúmulos observados.

Grandes barrar de error debido a la determinación de masa y si se encuentra virializado.

BIBLIOGRAFÍA

- Baumann, D. (2022). *Cosmology*. Cambridge University Press.
- Tong, D. (2019). *Cosmology*. University of Cambridge.
- Schneider, P. (2006). *Extragalactic Astronomy and Cosmology*. Springer.
- Andrew R. Zentner (2006). The Excursion Set Theory of Halo Mass Functions, Halo Clustering, and Halo Growth. *Int.J.Mod.Phys.D*16:763-816.
- Springel, V. et al. (2005). Simulating the joint evolution of quasars, galaxies and their large-scale distribution. *Nature* 435:629-636.



¡Muchas gracias!

¿Preguntas?