

# Lentes gravitacionales

Rodrigo Cabral

Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Montevideo

Examen de Cosmología  
3 de marzo de 2023



FACULTAD DE  
**CIENCIAS**  
UDELAR | [fcien.edu.uy](http://fcien.edu.uy)



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

# Índice

1 Introducción

2 Cosmografía

3 Bibliografía

# Índice

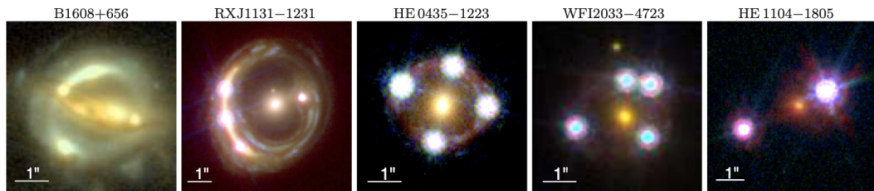
1 Introducción

2 Cosmografía

3 Bibliografía

# Entendiendo el concepto

La masa desvía el trayecto de la luz, la formación de imágenes de objetos distantes por este efecto se denomina **lente gravitacional**.



**Figura:** Lentes en cuásares. Extraído de [Moresco et al. \(2022\)](#)

## Deflexión

$$\frac{GM}{c^2 b} \ll 1 \implies \boxed{\delta\phi_{def} = \frac{4GM}{c^2 b}}$$

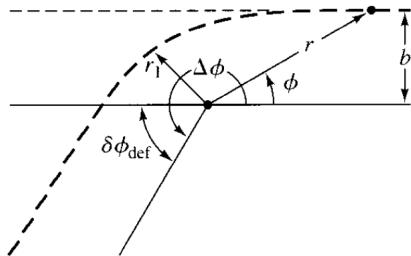
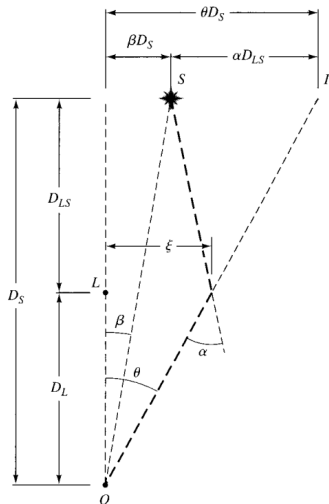


Figura: Hartle (2003)

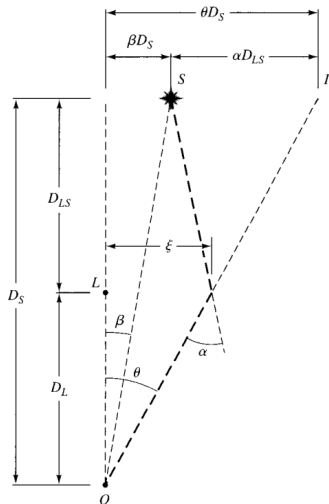
# Modelo de lente delgada



- $O$ : observador
- $L$ : objeto masivo
- $S$ : fuente
- $D_L$ : distancia masa-observador
- $D_{LS}$ : distancia masa-fuente
- $D_S$ : distancia fuente-observador

Figura: Hartle (2003)

# Modelo de lente delgada



$$\theta D_S = \beta D_S + \alpha D_{LS}$$

(Ecuación de la lente)

$$b \approx \xi, \quad \xi \approx \theta D_L$$

$$\Rightarrow \theta = \beta + \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

$$\theta_E = \left[ 2R_S \left( \frac{D_{LS}}{D_S D_L} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

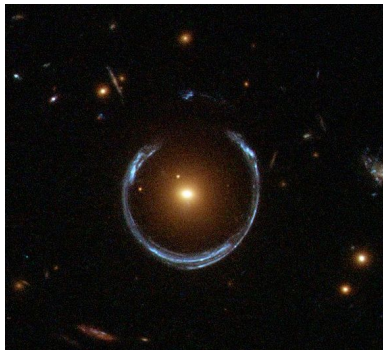
(Ángulo de Einstein)

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

Figura: Hartle (2003)

# Anillo de Einstein

Caso degenerado:

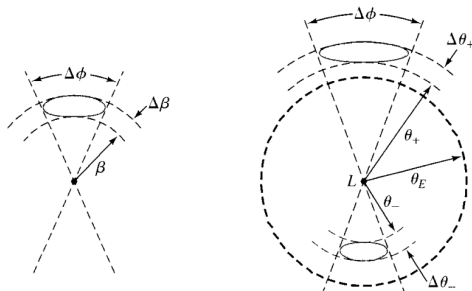


$$\beta = 0 \implies \theta = \theta_E$$

$\implies \theta_E$  **escala angular característica**



# Objetos extensos



$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ \beta \pm (\beta^2 + 4\theta_E^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Las imágenes se distorsionan

# Objetos extensos



# Objetos extensos

Teniamos que:

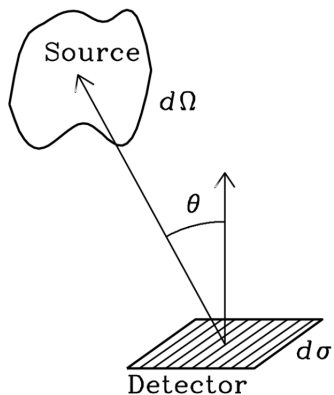
$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ \beta \pm (\beta^2 + 4\theta_E^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Diferenciando:

$$\Delta\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{\beta}{(\beta^2 + 4\theta_E^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \Delta\beta$$

No solo hay un cambio en forma: también en brillo

# Cambio en brillo



$$\Delta f = (\text{brillo superficial}) \times \Delta\Omega$$

- $\Delta f$ : flujo recibido
- $\Delta\Omega$ : ángulo sólido

## Cambio en brillo

Entonces, la relación entre el brillo de cada imagen  $I_{\pm}$  y el brillo si no hubiera efecto de lente  $I_*$  viene dado por:

$$\frac{I_{\pm}}{I_*} = \frac{\Delta\Omega_{\pm}}{\Delta\Omega_*}$$

En coordenadas esféricas:  $\Delta\Omega = \sin\theta\Delta\theta\Delta\phi \sim \theta\Delta\theta\Delta\phi$

$$\frac{I_{\pm}}{I_*} = \left| \frac{\theta_{\pm}\Delta\theta_{\pm}\Delta\phi}{\beta\Delta\beta\Delta\phi} \right|$$

Como  $\theta_{\pm}$  y  $\beta$  son pequeños  $\frac{\Delta\theta_{\pm}}{\Delta\beta} \sim \frac{d\theta_{\pm}}{d\beta}$

$$\frac{I_{\pm}}{I_*} = \left| \left( \frac{\theta_{\pm}}{\beta} \right) \left( \frac{d\theta_{\pm}}{d\beta} \right) \right| = \frac{1}{4} \left( \frac{\beta}{(\beta^2 + 4\theta_E^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(\beta^2 + 4\theta_E^2)^{\frac{1}{2}}}{\beta} \pm 2 \right)$$

# Cambio en brillo

Como  $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \forall x > 0 \implies$  La imagen dentro del anillo es menos brillante que la original y la de fuera más.

$$\frac{I_{tot}}{I_*} = \frac{I_+ + I_-}{I_*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{(\beta^2 + 4\theta_E^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(\beta^2 + 4\theta_E^2)^{\frac{1}{2}}}{\beta} \right)$$

¡El brillo total siempre aumenta!

## Ejemplo

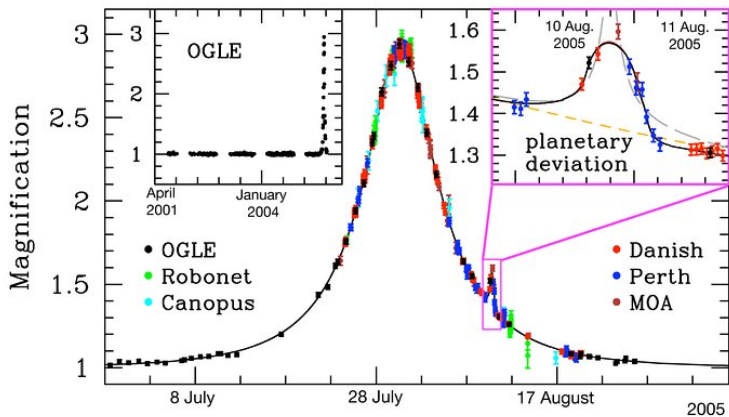


Figura: Extraído de ESO

# Retraso temporal

El tiempo que tarda la luz en llegar para formar cada imagen es distinto.

Ejemplo:  $D_L = D_{LS} = \frac{D_S}{2}$ ,  $\beta \ll \theta_E \ll 1 \implies \Delta D \approx 2\beta\theta_E D_S$  y  $\Delta t = \frac{\Delta D}{c}$

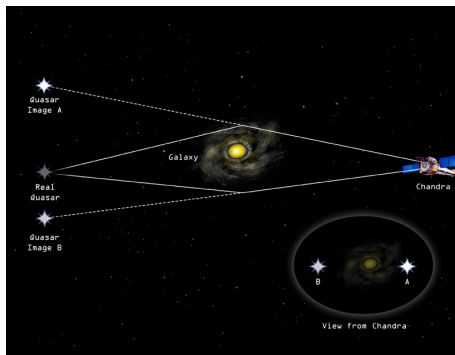


Figura: Extraído de: Chandra X-Ray Observatory



# Índice

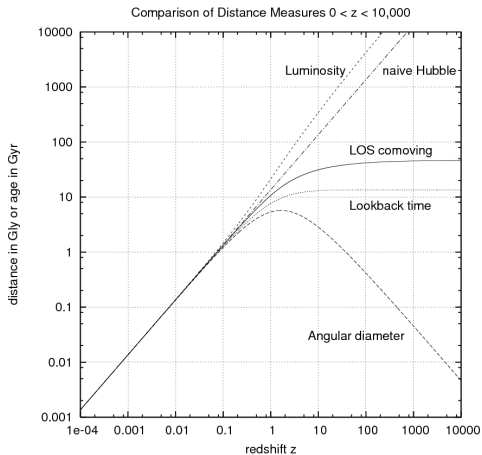
1 Introducción

**2 Cosmografía**

3 Bibliografía

# Distancia de diámetro angular

$$D_A = \frac{x}{\theta}$$



# Enfoque más formal

Recordamos:

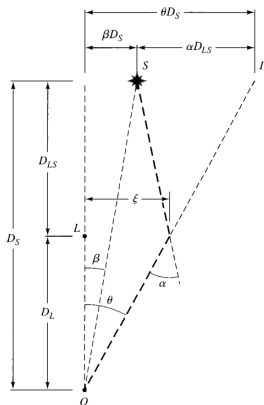


Figura: Hartle (2003)

Definimos  $\alpha(\theta)$  tal que<sup>a</sup>:

$$\beta = \theta - \alpha(\theta)$$

para el caso de lente delgada tenemos una expresión para  $\alpha(\theta)$ , en general:

$$\alpha(\theta) = \nabla\varphi(\theta)$$

<sup>a</sup>Pensamos  $\beta$  y  $\theta$  como coordenadas planas

## Enfoque más formal

Se puede demostrar que:

$$\Delta t_{AB} = \frac{D_{\Delta t}}{c} [\tau(\boldsymbol{\theta}_A, \boldsymbol{\beta}) - \tau(\boldsymbol{\theta}_B, \boldsymbol{\beta})]$$

donde:

$$\tau(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) = \left[ \frac{(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta})^2}{2} - \varphi(\boldsymbol{\theta}) \right]$$

es el potencial de Fermat, y:

$$D_{\Delta t} \equiv (1 + z_L) \frac{D_L D_S}{D_{LS}}$$

## Enfoque más formal

$D_{\Delta t}$  es una distancia física que ancla la escala del universo con los corrimientos al rojo involucrados (Moresco et al. (2022)). Entonces:

$$H_o \propto D_{\Delta t}^{-1}$$

y depende levemente de la historia de la expansión desde  $z = 0$  hasta los  $z$  de la fuente y el deflector.

¿Podemos medir  $\Delta t_{AB}$ ?

## Enfoque más formal

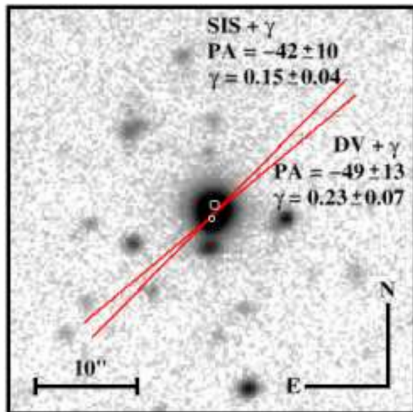
En resumen, para realizar las mediciones se necesita ([Moresco et al. \(2022\)](#)):

- Descubrir lentes con una fuente variable
- Medir  $z_L$  y  $z_S$
- Detectar retrasos temporales entre múltiples imágenes
- Aplicar modelos de lente para determinar el potencial de Fermat
- Estudiar el entorno a la lente para restringir distintas degeneraciones

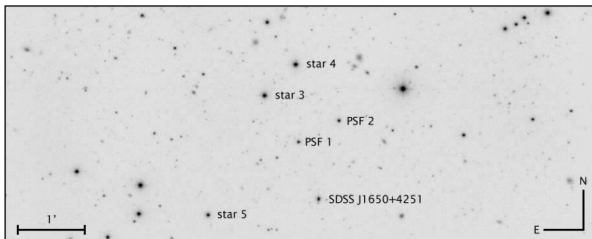
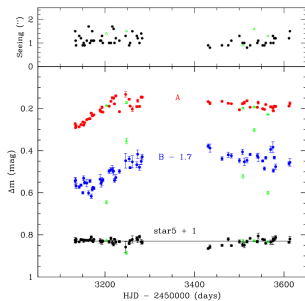
# Ejemplo observacional

Necesitamos fuentes variables  $\implies$  cuásares son buenos candidatos

Vuissoz et al. (2007):

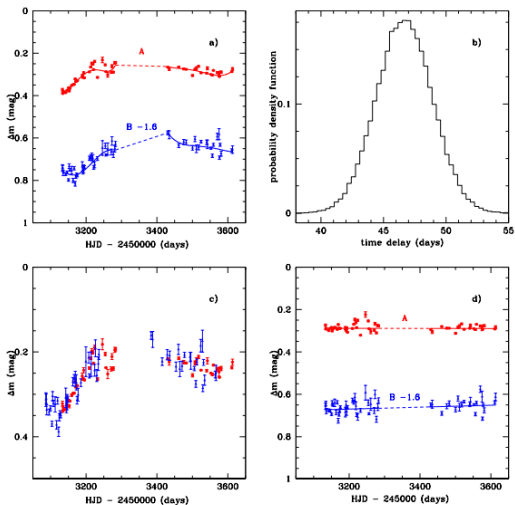


## Ejemplo observacional





## Ejemplo observacional



## Ejemplo observacional

En este trabajo se obtuvo  $\Delta t \approx 49,5 \pm 1,9$  días y, según distintos modelos, valores de  $H_o$  de entre  $50 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$  y  $80 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ .

En general se necesita ([Moresco et al. \(2022\)](#)):

- Telescopio de  $\sim 1$  o 2 metros
- Precisión fotométrica del orden de las milimagnitudes
- Buen muestreo de curvas de luz
- Campaña de observación con duración suficiente para detectar las variaciones

# Determinación de parámetros cosmológicos

Teníamos:

$$\beta = \theta - \alpha(\theta)$$

Puede ser expresado en términos del ángulo físico de deflexión  $\hat{\alpha}(\theta)$  como sigue:

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_S} \hat{\alpha}(\theta)$$

con:

$$\hat{\alpha}(\theta) = \frac{2}{c^2} \nabla \int \Phi(\theta, l) dl$$

y:

$$D_A(z) = \frac{c}{H_o} \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{dz}{[\Omega_m(1+z)^3 + (1-\Omega_m)(1+z)^{3(1+w)}]^{\frac{1}{2}}}$$

## Determinación de parámetros cosmológicos

Con lentes de simetría circular y midiendo  $\beta$  y  $\theta$  desde el centro de la lente (análogo a lo que vimos al inicio) recuperamos el resultado:

$$\hat{\alpha}(\theta) = \frac{4GM(|\theta|)}{c^2 D_L |\theta|^2} \theta$$

y el radio del anillo de Einstein queda:

$$\theta_E(z_L, z_S) = \sqrt{\frac{4GM[\theta_E(z_L, z_S)]}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}$$

Siendo  $M[\theta_E]$  la masa proyectada encerrada por el anillo de radio  $\theta_E$

## Determinación de parámetros cosmológicos

Consideramos dos fuentes alineadas con el deflector, con  $z_{S,1}$  y  $z_{S,2}$ , entonces:

$$\frac{\theta_E(z_L, z_{S,1})}{\theta_E(z_L, z_{S,2})} = \sqrt{\frac{M[\theta_E(z_L, z_{S,1})] D_{LS}(z_L, z_{S,1})}{M[\theta_E(z_L, z_{S,1})] D_S(z_{S,1})} \frac{D_S(z_{S,2})}{D_{LS}(z_L, z_{S,2})}}$$

Definimos:

$$\Xi(z_L, z_{S,1}, z_{S,2}) = \frac{D_{LS}(z_L, z_{S,1})}{D_S(z_{S,1})} \frac{D_S(z_{S,2})}{D_{LS}(z_L, z_{S,2})}$$

que se denomina *family ratio* y sigue siendo útil aunque se tengan distribuciones arbitrarias de masa.

# Determinación de parámetros cosmológicos

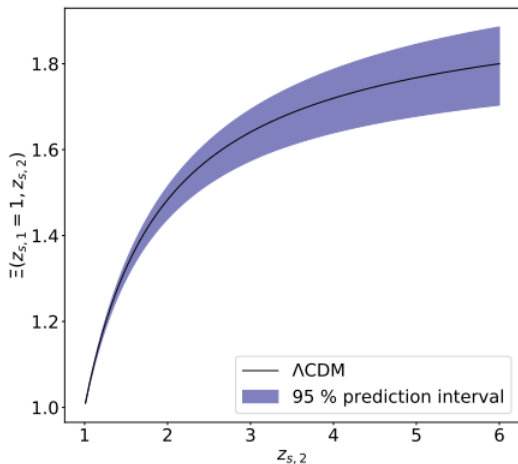


Figura: Moresco et al. (2022)

## Algunos resultados...

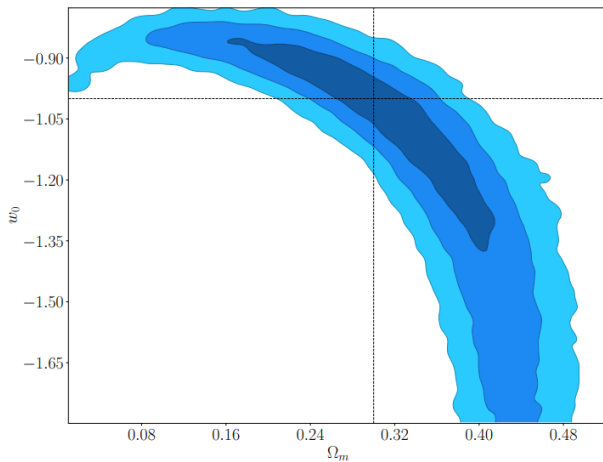


Figura: Moresco et al. (2022)

## Algunos resultados...

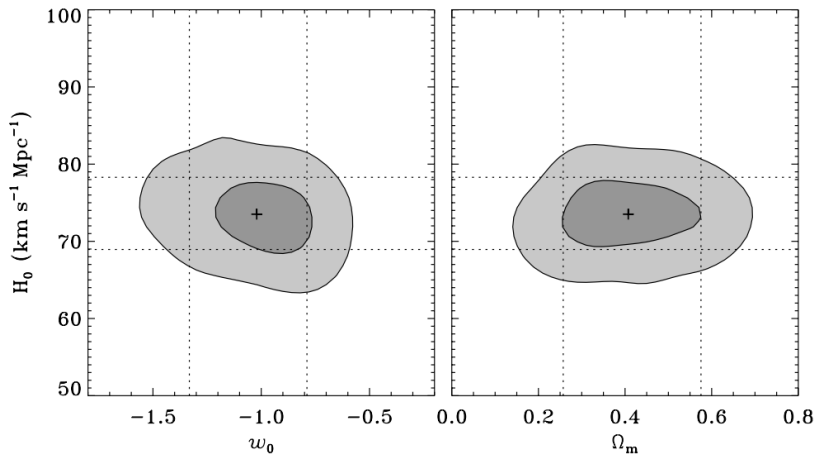


Figura: Moresco et al. (2022)



# Conclusión

Es posible utilizar lentes gravitacionales para determinar parámetros cosmológicos como  $H_0$ ,  $\Omega_m$  y  $w$  con sondeos no muy profundos.

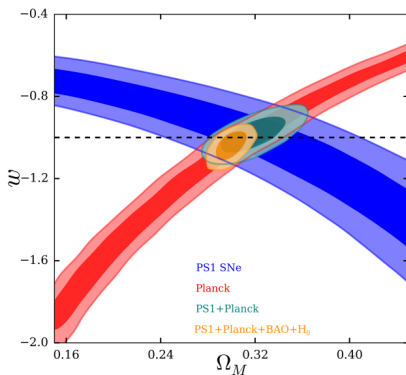


Figura: Jones et al. (2018)

# Índice

1 Introducción

2 Cosmografía

3 Bibliografía

# Bibliografía

Hartle J. B., 2003, Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity, illustrate edn. Benjamin Cummings

Jones D. O., et al., 2018, [ApJ](#), 857, 51

Moresco M., et al., 2022, [Living Reviews in Relativity](#), 25, 6

Vuissoz C., et al., 2007, [A&A](#), 464, 845

¿Preguntas?