Mec. Estadística 2022 Clase 3

Interpretando el teorema de Birkhoff

Sabemos entonces que significan “volúmenes” en el enunciado “el microestado pasa iguales tiempos en iguales volúmenes de Σ ”.
“Fracción de volumen” de un conjunto $A \subset \Sigma$ seria entonces $vol(A)/vol(\Sigma)$.

¿Que es “fracción del tiempo”? La fracción del tiempo que el sistema esta en A se define como un limite. Si durante el intervalo de tiempo de $t=0$ a $t=T$, el sistema pasa un tiempo $T_A(T)$ en *A*, entonces la fracción del tiempo que pasa en A es $T_A(T)/T$ en este intervalo. La fracción de todo el tiempo que pasa en *A* es

$$\lim_{T\to\infty} \frac{T_A(T)}{T}$$

No es obvio *a priori* que este limite siquiera es definido, pero Birkhoff demostró que lo es, y que es igual a $vol(A)/vol(\Sigma)$.

Eso es casi todo. Quedan dos palabras misteriosas mas en el enunciado. Dijimos que el enunciado valía “Para casi todo microestado inicial”. Esto tiene un significado matemático preciso. Significa que el enunciado vale para todos microestados iniciales en Σ salvo un subconjunto de volumen 0. También se pide que el conjunto *A* sea “medible”. Esto es una condición muy débil que requiere que *A* sea tal que se puede integrar sobre el y definir su volumen.

Entonces tenemos todo para interpretar el teorema de Birkhoff. Nos permite concluir que si hay un macroestado que ocupa casi todo el volumen de Σ entonces el sistema va pasar casi todo su tiempo en el. Este macroestado es el macroestado de equilibrio.

Volviendo a cantidades conservadas y la definición del espacio de fases accesible.

Pero esto no nos deja sacar muchas conclusiones si no sabemos cuales son las cantidades conservadas, y por lo tanto cuál el espacio de fases accesible. Normalmente hacemos la hipótesis que la energía es la única cantidad conservada.

Si lo pensamos un poquito esto no parece una hipótesis tan razonable. Mecánica clásica es determinista y reversible. El (micro)estado actual determina el estado inicial si sabemos el tiempo *t* que el sistema ha estado andando desde que estuvo en el estado inicial. Solo hace falta tomar el estado actual y evolucionarlo hacia atrás por un tiempo *t*. (No es necesario que las ecuaciones de movimiento sean invariantes bajo reflexión en el tiempo, solo que las ecuaciones reflejadas sean deterministas, que lo son.) Entonces si el espacio de fases tiene $6N$ dimensiones, hay $6N$ cantidades conservadas – las coordenadas canónicas del estado inicial – expresables como funciones de las coordenadas canónicas actuales y el tiempo *t*. Si no se sabe el valor de *t* entonces hay una familia uniparametral de posibles estados iniciales, y entonces $6N-1$ cantidades conservadas, todos independientes de *t* !

¿Que estamos haciendo mal?

Primero, despejar a *t* no es trivial. Dado los valores actuales de los $6N$ coordenadas canónicas del sistema podemos intentar de hallar los valores de estas coordenadas en el momento en el cual uno de ellos, llamamos lo q_1, alcanza un valor prefijado, p. ej. cuando $q_1=0$. Si esta condición fija un tiempo *t* único entonces determina valores únicos de las coordenadas canónicas y estos son cantidades conservadas, ya que tomando cualquier punto sobre la trayectoria del sistema como el punto "actual" implica los mismos valores de estas coordenadas. Por supuesto q_1 es trivial, pero las demás coordenadas son constantes no-triviales.
Pero si el sistema visita $q_1=0$ mas que una vez en la trayectoria esto no funciona tan bien. Las cantidades conservadas tendrían múltiples valores, o dicho de otra manera tienen como valores sucesiones de números en lugar de números únicos. Esto pasa a menudo si la trayectoria del sistema esta atrapada en una región acotada en el espacio de fases, lo cual es muy común.

Uno puede aceptar cantidades conservadas cuyos valores son sucesiones (es decir vectores en algún espacio) pero surge la pregunta si estas cantidades conservadas son tales que juegan un rol análogo a la energía, limitando el espacio de fases accesible.

Fijando el valor de una cantidad conservada no constante y *continua* restringe la trayectoria del microestado a una superficie en el espacio de fases. Si no es continua no necesariamente tiene este efecto.

Ejemplo de partícula libre en 2-toro = dos ruedas libres.

Hay un sistema muy sencillo que ilustra esto. El sistema consiste de dos ruedas girando libremente, e independientemente. Cada rueda esta descrito por su ángulo θ_s y el momento conjugado, el momento angular $l_s=I\,\dot{\theta}_s$, con $s=1,2$.

> (Este sistema puede parecer un poco rebuscado, pero es equivalente a varios sistemas realisticos:
>
> - un par de osciladores armónicos,
> - una partícula en un recipiente rectángular bidimensional,
> - y, si se generaliza a un numero arbitrario de ruedas, es equivalente a un tipo de sistema llamado *sistema integrable* al que pertenecen casi todos sistemas mecánicas que se pueden resolver explícitamente.)

DIBUJO

Porque las ruedas no interactúan entre si ambos momenta, l_1 y l_2, se conservan. Pero el espacio de fases tiene 4 dimensiones, así debería haber una cantidad conservada más. (Está la energía, pero es una función de l_1 y l_2: $E=\dfrac{l_1^2+l_2^2}{2I}$.)

El espacio de fases accesible definido por solo las dos cantidades conservadas l_1 y l_2 es el espacio de configuración, es decir, el espacio de los dos ángulos θ_1 y θ_2. Este espacio es el producto cartesiano de dos círculos, es decir, es un toro.

DIBUJO

Pero se puede pensar como un cuadrado de lado 2π , con la regla de que cuando el estado sale por un lado del cuadrado reaparece por el lado opuesto. Alternativamente se puede pensar que el estado mueve en un plano infinito, pero dado que todos los ángulos que difieren por un múltiplo entero de 2π son equivalentes el estado siempre tiene un representante equivalente en el cuadrado $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$.

¿Como son las trayectorias del sistema? La velocidad $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ esta fijado por los momenta, que se conservan. Así la velocidad es constante.

Si la razón $\alpha=\dot{\theta}_1/\dot{\theta}_2$ es racional, es decir, igual a n_1/n_2 por algunos enteros n_1 y n_2 entonces si rueda 1 hace $\frac{t\,\dot{\theta}_1}{2\pi}=n_1$ vueltas entonces rueda 2 hace $\frac{t\,\dot{\theta}_2}{2\pi}=n_2$ vueltas, y en tiempo t el sistema ha vuelto a su estado original. Es decir, el sistema describe una orbita cerrada.

Y si el sistema vuelve a su estado inicial luego de tiempo t entonces $\frac{t\,\dot{\theta}_1}{2\pi}$ y $\frac{t\,\dot{\theta}_2}{2\pi}$ deben ser enteros, lo cual implica que $\dot{\theta}_1/\dot{\theta}_2$ es racional.

DIBUJO

¿Que pasa si $\alpha=\dot{\theta}_1/\dot{\theta}_2$ es irracional? El sistema nunca puede volver a su estado original. Sigue eternamente por su espacio de fase accesible sin nunca repetir sus pasos. De hecho la trayectoria es densa en este espacio. Si esperas suficiente tiempo el estado pasa tan cerca como quieres a un punto dado.

DIBUJO

Demostración: Consideren los puntos P_n donde la trayectoria que pasa por el estado inicial $P_0=(\theta_1=0,\theta_2=0)$ pasa por el círculo $\theta_2=0$ luego de que n vueltas completas de rueda 2. Si estos puntos son densos en el circulo, entonces la trayectoria es densa en el espacio de fases accesible.

En una vuelta de la rueda 2, rueda 1 gira por $2\pi\times\dot{\theta}_1/\dot{\theta}_2$, es decir por una “fracción” irracional α de una vuelta. Ahora bien, sea $I_0=\{-\delta<\theta_1<\delta, \theta_2=0\}$, un pequeño intervalo del círculo $\theta_2=0$, y sea I_n el resultado de girar I_0 por un angulo $2\pi n\alpha$.

La rotación preserva la longitud del intervalo, entonces los I_n no pueden estar todos disjuntos. Pero si $I_n\cap I_m\neq\emptyset$ entonces $I_{n-m}\cap I_0\neq\emptyset$. Esto implica que el punto P_k , con $k=n-m$, que es el punto medio de I_{n-m} , esta a angulo $\beta<2\delta$ desde el origen $\theta=0$. Girar por k veces $2\pi\alpha$ es equivalente a girar por $\beta<2\delta$. Por otro lado $\beta\neq0$ porque si fuera 0 entonces α seria racional.

La sucesión $P_0, P_k, P_{2k}, P_{3k},\ldots$ que se obtienen girando el origen P_0 por β $0,1,2,3,\ldots$ veces circambula el circulo con puntos sucesivos separados por ángulo $\beta<2\delta$. Entonces, dado un punto cualquiera, Z, en el círculo $\theta_2=0$, hay un punto de la sucesión $P_0, P_1, P_2, P_3,\ldots$ a un angulo menor que δ de Z. Pero $\delta>0$ es arbitrario, entonces $P_0, P_1, P_2, P_3,\ldots$ es denso. Q.E.D.

Una cantidad conservada ϕ tiene valor constante sobre la trayectoria. Pero si ϕ es continuo y tiene este valor contante, que llamaremos *u*, en puntos arbitrariamente cerca a cualquier punto *z* dado entonces debe tener valor *u* en *z* también. ϕ debe ser constante en el espacio de fase accesible! Entonces no puede haber cantidad conservada continua y no constante mas allá de l_1 y l_2 , justamente porque la trayectoria no esta confinada a una superficie en el espacio de l_1 y l_2 constantes, pero mas bien explora todo este espacio.
Por otro lado, no hay dificultad en definir una cantidad conservada ψ que no es constante si permitimos que sea descontinua: simplemente pone $\psi=1$ en la trayectoria y $\psi=0$ fuera de la trayectoria.

Así las *6N-1* cantidades conservadas no necesariamente todos limitan el espacio de fase accesible.
Llamemos a las cantidades conservadas que limitan el espacio de fase accesible *separadores*.
Hay sistemas con *6N-1* cantidades conservadas separadores.

Por ejemplo en el caso de una colección de partículas libres, sin recipiente y sin interacción entre ellos esta conservado el momento lineal $\boldsymbol{p}$ y el momento angular $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ de cada partícula - juntos 5 cantidades independientes.
($\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}/p^2$ son los dos componentes de la posición inicial en el plano perpendicular a $\boldsymbol{p}$).
DIBUJO

Otros tienen menos:

1. Confinando el sistema a una caja rectangular reduce las cantidades conservadas a *3N* , los módulos $|p_i|$ de los componentes de los momenta de cada partícula según los ejes de la caja. Este sistema es esencialmente como el de dos ruedas. En general el numero de cantidades conservadas separadoras en sistemas integrables es $\geq\frac{1}{2}(\textit{dimension espacio de fases})$.
DIBUJO

2. Cajas de otras formas reducen las cantidades conservadas a solo *N*, las energías cinéticas de las partículas. Esto ya lleva mas trabajo demostrar.
DIBUJO

3. Si las partículas interactúan entre si parece que el numero de cantidades conservadas separadores se reducen a solo la energía total. Esto ha sido demostrado en algunos modelos específicos – dos 2-esferas duras, o N esferas duras con masas desiguales, …
DIBUJO

Esto hace pensar que cantidades conservadas separadores, mas allá de la energía total, son cosas delicadas, que se rompen cuando se altera el sistema aún muy poco.
Entre 1954 y 1963 Kolmogorov, Arnold y Moser demostraron el teorema KAM, que confirma esta idea solo parcialmente. El teorema trata un sistema integrable (como las dos ruedas) que se altera agregando a su Hamiltoniano un término arbitrario pero pequeño (aunque no infinitesimal). El teorema muestra que el término adicional tiende

a romper las leyes de conservación separadores pero hay islas en el espacio de fases donde persisten, con trayectorias del sistema atrapadas en ellas.

DIBUJO

No se sabe que pasa en sistemas realisticos de muchos grados de libertad.
Por otro lado suponer que la energía es la única cantidad conservada separadora y por lo tanto que toda la superficie de energía constante es accesible, lleva a predicciones que son de acuerdo con los hechos. Puede ser que esto es porque la hipótesis es cierta, o porque no es necesario que vale estrictamente para que valgan las predicciones.

Ahora en adelante vamos a suponer, como hipótesis de trabajo, que la energía es la única cantidad conservada separadora, salvo en casos que evidentemente hay otros, como en el caso de cuerpos flotando libres en el espacio exterior (que tienen las adicionales cantidades conservadas de momento lineal y angular).

Entonces suponemos que el sistema pasa iguales tiempos en iguales volúmenes en la superficie $H(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})=E$. Esto es la versión para sistemas mecánicos del hecho 2, que el zapatero pasa igual tiempo en cada $1\,m^2$.