Matemática 2 - módulo I
Curso 2022

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen

7 de febrero de 2023

1. Consideremos la matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
donde a es un parámetro real.

   a) Determinar los valores de a para los cuales A no es invertible.

   b) Calcular A^{-1} en el caso en que $a = 2$.

   Consideremos ahora el sistema
$$\begin{cases} ax + 2z = 1 \\ ay + z = -1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

   c) ¿Para qué valores de a el sistema dado tiene solución única?

   d) ¿Existe algún valor de a para el cual hay infinitas soluciones?

2. Las hembras de cierta especie vive en promedo un total de 9 años. Para estudiar el crecimiento de la población se dividen en tres clases etarias de 3 años. Se sabe que las hembras más jóvenes no tienen hijas, que las adultas tienen en promedio 3 hijas cada 3 años y que las ancianas tienen una hija cada tres años. La tasa de sobrevivencia de las jóvenes es de 50 % mientras que la adultas sobreviven todas.

   a) Plantear la matriz de Leslie correspondiente al modelo, de acuerdo a los datos dados.

   b) Si en determinado momento hay 100 jóvenes, 60 adultas y 50 ancianas, ¿cuántas hembras habrá en total después de 18 años?

   c) Hallar el valor propio dominante y un vector propio asociado.

   d) Decir cuál será el comportamiento de la población a largo plazo justificando la respuesta.

Solución.

1. a) $\det(A) = \begin{vmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 5a = a(a-5)$

A no es invertible para $a=0$ y $a=5$.

b) $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

c) Si a no es ni 0 ni 5, A es invertible y por lo tanto el sistema es C.D., es decir tiene una única solución. Si $a=0$ o $a=5$ el sistema puede ser incompatible o compatible indeterminado por lo cual o bien no hay solución o la solución no es única.

d) Sólo es posible tener infinitas soluciones si A no es invertible. Sólo hay que analizar los casos $a=0$ y $a=5$.

$\underline{a=0}$ $\begin{cases} 2z = 1 \\ z = -1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ $\underline{\text{Incompatible}}$

$\underline{a=5}$ $\begin{cases} 5x + 2z = 1 \\ 5y + z = -1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ $\underline{\text{Incompatible}}$

Por lo tanto no hay infinitas soluciones para ningún valor de a.

2. a)

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $X_{m+1} = L X_m \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$

18 años = 6 periodos de 3 años
Hay que calcular X_6.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 230 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 210 \\ 115 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 395 \\ 105 \\ 115 \end{pmatrix}$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 430 \\ 197{,}5 \\ 105 \end{pmatrix}, \quad X_5 = \begin{pmatrix} 695{,}5 \\ 215 \\ 197{,}5 \end{pmatrix}, \quad X_6 = \begin{pmatrix} 842{,}5 \\ 347{,}75 \\ 215 \end{pmatrix}$$

El total de hembras después de 18 años será 1405.

c)

$$\chi_L(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}$$

Raíz evidente $\lambda = -1$
Bajando por Ruffini

$$\chi_L(\lambda) = -(\lambda+1)\left(\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{2}\right) = -(\lambda+1)\left(\lambda - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}} \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/\lambda_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/(1+\sqrt{3}) \\ 2/(1+\sqrt{3})^2 \end{pmatrix}.$$

d) $a_2 a_3 \neq 0$ y $\lambda_1 > 1 \Rightarrow$ La población tiende a crecer exponencialmente.