**Matemática 2 - módulo II**
**Curso 2022**

**Universidad de la República**
**Facultad de Ciencias**
**Centro de Matemática**

**Examen**

*7 de febrero de 2023*

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por la fórmula

$$f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-x^2-y^2}.$$

   *a*) Hallar todos los puntos críticos de $f$.
   *b*) ¿Tiene $f$ máximo y/o mínimo absolutos? Si tiene, hallarlos.
   *c*) Encontrar máximo y mínimo absolutos de $f$ en el conjunto $D = \{(x,y) \ : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 3, 0 \leq y\}$.

2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = x$. Consideramos el conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ delimitado por la recta $y = \frac{1}{2}x$ y la parábola $y = -x^2 + 4x$.

   *a*) Escribir el conjunto $D$ en coordenadas cartesianas y dibujarlo.
   *b*) Plantear la integral de $f$ en $D$ integrando primero con respecto a $y$ y luego con respecto a $x$ (es decir, escribir la integral en la forma $\int \int f(x,y)dydx$ poniendo adecuadamente los límites de integración).
   *c*) Calcular la integral de $f$ en $D$.

# Solución.

**1. a)** $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(1-x^2-2y^2)\,e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(2-x^2-2y^2)\,e^{-x^2-y^2}$$

Ptos críticos : $(0,0)$ , $(\pm 1,0)$ , $(0,\pm 1)$ .

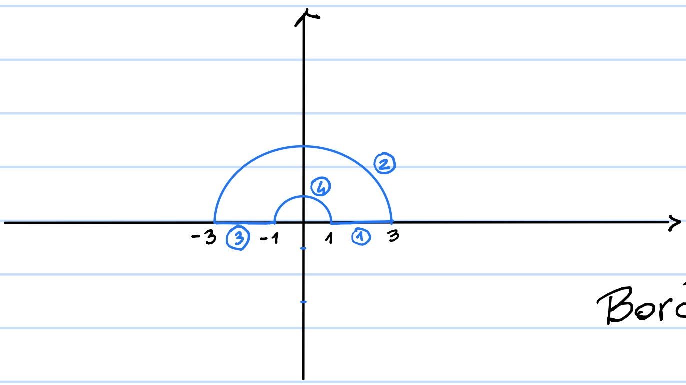
**b)** $\left.\begin{array}{l} f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \\ f(0,0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ El mínimo de $f$ es $0$.

$f(x,y) \leq 2r^2 e^{-r^2}$ $\qquad r^2 = x^2+y^2$

$\lim\limits_{r\to+\infty} r^2 e^{-r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad f$ tiene máximo.

$f(\pm 1,0) = e^{-1}$, $f(0,\pm 1) = 2e^{-1} \Rightarrow$ El máximo de $f$ es $2e^{-1}$.

**c)**




Bordes ① y ③ : $f(x,0) = x^2 e^{-x^2}$

$f(x,0)' = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$

$\rightarrow \quad x = \pm 1$

Borde ② : $x^2+y^2 = 3$

$f(x,y) = (3+y^2)\,e^{-3}$

$\rightarrow \quad y = 0$

Borde ④ : $x^2+y^2 = 1 \qquad f(x,y) = (1+y^2)\,e^{-1} \rightarrow y = 0$ .

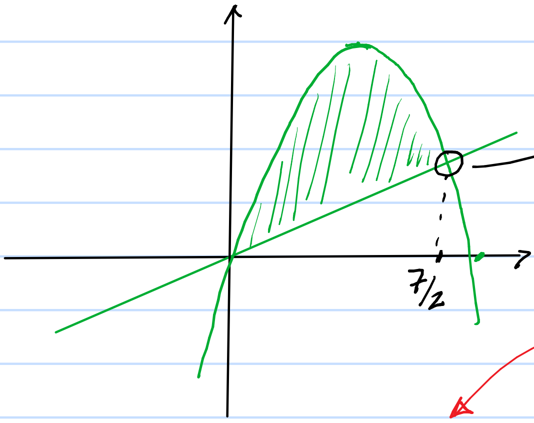
No hay puntos críticos en el interior.

Candidatos : $(\pm 1, 0)$ , $(0, \pm\sqrt{3})$

$f(\pm 1, 0) = e^{-1} \quad \rightarrow$ máximo

$f(0, \pm\sqrt{3}) = 3e^{-3} \quad \rightarrow$ mínimo .

2. a) $D = \{ (x,y) : \frac{1}{2}x \leq y \leq -x^2+4x \}$




$\frac{1}{2}x = -x^2+4x \Rightarrow \underline{x = \frac{7}{2}}$

b) $\displaystyle\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{7/2}\int_{\frac{1}{2}x}^{-x^2+4x} x\,dy\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{7/2}\int_{\frac{1}{2}x}^{-x^2+4x} x\,dy\,dx = \int_0^{7/2} -x^3+4x^2-\frac{1}{2}x^2\,dx =$

$\displaystyle= \int_0^{7/2} -x^3+\frac{7}{2}x^2\,dx = -\frac{x^4}{4}+\frac{7x^3}{6}\Big|_0^{7/2} = \frac{1}{12}\left(\frac{7}{2}\right)^4 \approx 12{,}5.$