Pafnuty Lvovich Chebyshev: El matemático de hoy

Figura: A la izquierda el inventor de las variables aleatorias, en el centro, su monumento en la Universidad Lomonosov de Moscú, a la derecha, San Petersburgo, su ciudad

Probabilidad - Clase 15
Variables aleatorias
funciones de distribución

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

Curso de la Licenciatura en Matemática - 2020

Contenidos

Variables aleatorias

- Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
- Llamamos *variable aleatoria* a una función

$$X\colon \Omega \to \mathbb{R}$$

es decir $X(\omega)$ que toma valores reales,

- y verifica la condición

$$\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \tag{1}$$

para todo x real.

- En la terminología del análisis real, una función $X(\omega)$ que cumple la condición (1) para todo x, se denomina *medible*.
- De esta forma, una variable aleatoria es una función real y medible de los sucesos elementales.
- Se puede verificar que la condición (1) para todo x, es equivalente a la condición

$$\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A} \tag{2}$$

para cualquier conjunto boreliano[1] B de puntos de la recta real $\mathbb{R}$.

En el caso particular en el que B es el intervalo $(-\infty, x]$, la condicion (2) se convierte en la condición (1).

[1] La clase de los conjuntos borelianos en la recta es la mínima σ–álgebra de conjuntos, que contiene a todos los intervalos.

Ejemplo

- Consideremos un espacio de sucesos elementales Ω compuesto por una cantidad finita o numerable de puntos $\omega_1, \omega_2, \ldots$.
- Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los subconjuntos de Ω. (Es claro que este conjunto es una σ–álgebra.)
- Introducimos las probabilidades de los sucesos, asignándole a cada suceso elemental ω_i, en calidad de probabilidad, un número no negativo p_i ($i = 1, 2, \ldots$), de forma tal que la suma total de las probabilidades asignadas sea 1, es decir, $p_1 + p_2 + \cdots = 1$.

- En este espacio, cualquier función real $X = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, resulta ser una variable aleatoria, porque la condición (1) se verifica automáticamente para cualquier x, en vista de nuestra elección de la σ–álgebra $\mathcal{A}$.

- Entonces, en la situación considerada, la definición de variable aleatoria es muy sencilla: una variable aleatoria es una función que a cada suceso elemental le hace corresponder un número real.

Ejemplo

- Consideremos un espacio de sucesos elementales Ω compuesto por seis puntos $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ y ω_6.
- Sea $\mathcal{A}$ la σ–álgebra formada por todos los subconjuntos de Ω.
- Asignamos a cada uno de estos 6 puntos del espacio Ω la misma probabilidad, es decir, $1/6$.

- Como observamos en la sección 1.2, el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ así construido es un modelo matemático del experimento consistente en tirar un dado equilibrado.
- Convenimos en que el punto ω_i en este modelo está numerado de forma tal, que corresponde a la aparición de i puntos en la cara superior del dado.
- La función $X(\omega_i) = i$ $(i = 1, \dots, 6)$, que podemos interpretar como la cantidad de puntos obtenida luego de tirar el dado, es una variable aleatoria.
- (En el ejemplo anterior se consideró una clase mas general de variables aleatorias.)

Ejemplo

- Consideremos el espacio de sucesos elementales Ω compuesto por los puntos del intervalo $[0, 1]$;
- sean $\mathcal{A}$ la σ–álgebra de los conjuntos borelianos de este intervalo, es decir, la mínima σ–álgebra que contien
- Sea **P** la medida de Lebesgue en este intervalo
- La terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ es un espacio de probabilidad,
- Una función real X definida en un intervalo $\mathbf{I}$ se llama *boreliana*, si $\{\omega \in \mathbf{I} \colon X(\omega) \leq x\}$ es un conjunto de la σ–álgebra de Borel en $\mathbf{I}$ para todo x real.
- Cualquier función boreliana $X = X(\omega)$, $\omega \in [0, 1]$, es una variable aleatoria .

Función de distribución

- Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$
- una variable aleatoria $X = X(\omega),\ \omega \in \Omega$.
- El conjunto
$$\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \leq x\}$$
es un suceso (es decir, un conjunto de la σ–álgebra de sucesos $\mathcal{A}$),
- Está definida la probabilidad
$$\mathbf{P}(\{\omega \colon X(\omega) \leq x\})$$
para todo $x \in \mathbb{R}$;

- Esta probabilidad se designa

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(\{\omega \colon X(\omega) \leq x\})$$

- Se lee: la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor menor o igual que x.
- Se denomina *función de distribución* de la variable aleatoria X, a la función $F(x)$, definida para todos los valores x reales, mediante la fórmula

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x). \tag{3}$$

- Si X es una variable aleatoria y B un conjunto boreliano de puntos de la recta real $\mathbb{R}$,
- está definida la probabilidad $\mathbf{P}(\{\omega\colon X(\omega) \in B\})$, que será designada por $\mathbf{P}(X \in B)$, (también por brevedad.)

- La función $\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}(X \in B)$, definida para todos los conjuntos borelianos B de puntos de la recta real, se llama *función de probabilidad* de la variable aleatoria X.
- Es claro que
$$\mathbf{P}_X((-\infty, x]) = \mathbf{P}(X \leq x) = F(x), \qquad \text{para cualquier } x,$$
donde $F(x)$ es la función de distribución de la variable aleatoria X.
- Llamamos *distribución de probabilidad* (o más sencillamente *distribución*) de la variable aleatoria X, indistintamente, a la función de distribución $F(x)$ de la variable aleatoria X, o a la función de probabilidad $\mathbf{P}_X(B)$ de esta variable aleatoria.

Lema

Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *y una variable aleatoria* $X = X(\omega),\ \omega \in \Omega$*. Sean dos números* $a < b$*. Entonces, los conjuntos*

- $\{\omega\colon X(\omega) < a\}$,
- $\{\omega\colon X(\omega) = a\}$,
- $\{\omega\colon a < X(\omega) < b\}$,
- $\{\omega\colon a < X(\omega) \le b\}$,
- $\{\omega\colon a \le X(\omega) < b\}$,
- $\{\omega\colon a \le X(\omega) \le b\}$

son sucesos (es decir, elementos de la σ*–álgebra* $\mathcal{A}$*).*

Demostración

- Como X es una variable aleatoria, el conjunto $\{\omega\colon X(\omega) \leq a - 1/n\}$ pertenece a $\mathcal{A}$ para cualquier a real y cualquier n natural.
- Por ésto, en vista de la definición de σ–álgebra, la suma $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega\colon X(\omega) \leq a - 1/n\}$ también pertenece a $\mathcal{A}$.
- La suma de sucesos anterior es igual al conjunto $\{\omega\colon X(\omega) < a\}$ que, por lo tanto, es un suceso y pertenece a la σ–álgebra $\mathcal{A}$.
- Los restantes enunciados se demuestran en forma análoga.

En vista del lema recién demostrado están definidas las probabilidades:

- $\mathbf{P}(X < a)$,
- $\mathbf{P}(a \leq X < b)$,
- $\mathbf{P}(X = a)$,
- etc.

para cualquier variable aleatoria X y reales $a < b$ arbitrarios.

Propiedades de $F(x)$

Estudiemos ahora las propiedades que verifica la función de distribución $F(x)$ de una variable aleatoria X.

Propiedad

Se verifica $0 \leq F(x) \leq 1$*, para todo* x *real.*

Esta afirmación es consecuencia inmediata de la definición (3).

Propiedad

Si $a < b$*, entonces* $\mathbf{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$*.*

Demostración Observemos, que

$$\{\omega\colon X(\omega) \leq b\} = \{\omega\colon X(\omega) \leq a\} \cup \{\omega\colon a < X(\omega) \leq b\},$$

donde los sucesos a la derecha son incompatibles. Entonces, aplicando el axioma III, obtenemos

$$\mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(X \leq a) + \mathbf{P}(a < X \leq b).$$

De aquí, y de la fórmula (3), se concluye la validez de la propiedad.

Propiedad

La función $F(x)$ es no decreciente en toda la recta real, es decir, dados $a < b$ reales, vale $F(a) \leq F(b)$.

Demostración Esta afirmación se deduce de la propiedad anterior, teniendo en cuenta que, si $a < b$, entonces

$$F(b) - F(a) = \mathbf{P}(a < X \leq b) \geq 0.$$

es decir, $F(a) \leq F(b)$.

Propiedad

Se tiene $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ *y* $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Demostración Es claro que
$\Omega = \bigcup_{m=-\infty}^{m=+\infty}\{\omega\colon m-1 < X(\omega) \leq m\}$. Entonces, como los sucesos que aparecen en la suma son incompatibles dos a dos, aplicando el axioma III, tenemos

$$
\begin{aligned}
1 = \mathbf{P}(\Omega) &= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \mathbf{P}(\{\omega\colon m-1 < X(\omega) \leq m\}) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=-N}^{m=N} \mathbf{P}(m-1 < X(\omega) \leq m) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=-N}^{m=N} \big(F(m) - F(m-1)\big) = \lim_{N\to\infty} \big(F(N) - F(-N-1)\big).
\end{aligned}
$$

- Existen los límites $\lim_{x\to\infty} F(x)$, $\lim_{x\to-\infty} F(x)$, porque las funciones de distribución son no decrecientes (propiedad 3),
- De la igualdad obtenida y de la propiedad 1, obtenemos (como única posibilidad):
- $$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} F(-x) = 0,$$

  concluyendo la demostración.

Propiedad

La función de distribución $F(x)$ es continua por la derecha.

Demostración

- Sea x un real arbitrario.
- Consideremos una sucesión numérica $x_1, x_2, \ldots$ decreciente y convergente a x.
- Es decir $x_1 > x_2 > \cdots$, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.
- Sea $\mathbf{A}_n = \{\omega \colon x < X \leq x_n\}$.
- Es claro que $\mathbf{A}_1 \supset \mathbf{A}_2 \supset \cdots$, y que $\cap_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n = \emptyset$.

- Por la propiedad 8 en la sección 1.3, existe el

$$\lim_{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_n) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

- Entonces, aplicando la monotonía de la probabilidad:

-

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_n) = \mathbf{P}(x < X \leq x_n) = F(x_n) - F(x) \to 0 \ (n \to \infty),$$

lo que concluye la demostración.

Propiedad

Una función de distribución tiene una cantidad finita o numerable de puntos de discontinuidad.

Demostración Por las propiedades 1 y 3, la función $F(x)$ tiene:

$$\begin{aligned}
&\text{a lo sumo un salto de magnitud } h\text{, con } h > 1/2,\\
&\text{a lo sumo dos saltos de magnitud } h\text{, con } 1/2 \geq h > 1/3,\\
&\text{a lo sumo tres saltos de magnitud } h\text{, con } 1/3 \geq h > 1/4,\\
&\qquad\vdots\\
&\text{a lo sumo } m \text{ saltos de magnitud } h\text{, con } 1/m \geq h > 1/(m+1),\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

En consecuencia, el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función $F(x)$ es finito o numerable, dado que sus elementos se pueden numerar.

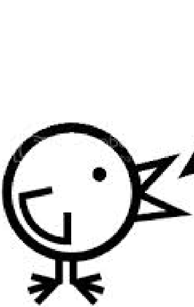

Figura: ¡Buen finde!