Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo diferencial e integral I
Primer semestre 2022

Examen teórico: diciembre de 2022

Nombre: ....

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función.

   (a) Explicar qué significa que f sea integrable (o sea: dar la definición de función integrable).

   (b) Probar que si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

2. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series cuyos términos satisfacen $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$

   (a) Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente y $a_n \leq b_n$ para todo n, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

   (b) De un ejemplo de aplicación del resultado del inciso (a) que involucre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Examen práctico: diciembre de 2022

Nombre: ....

1. Considere la función $f(x) = x/\sqrt{1+2x}$.
   a) Encuentre A y B para que la función $(A + Bx)\sqrt{1+2x}$ sea una primitiva de f.
   b) Calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$.
2. Encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región del plano xy delimitada por las curvas
$$y = \ln x, y = 0, y = 1, x = 0$$
alrededor del eje y.
3. Hallar la solución de la ecuación diferencial $x'' + x = t^2 - 1$ que satisface $x(0) = 1, x'(0) = 1$.
4. Resolver el siguiente problema de valores iniciales:
$$xy' + 2y = \operatorname{sen} x, y(\pi/2) = 0.$$