Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Cálculo diferencial e integral I
Primer semestre 2022

Examen teórico: febrero de 2023

Nombre: ....

1. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables.

   (a) Probar que $f(x) + g(x)$ es integrable y $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$.

   (b) Si $g(x) = |f(x)|$, enuncie la propiedad que vincula la integral de g con el valor absoluto de la integral de f.

2. Considerar la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = 0, a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

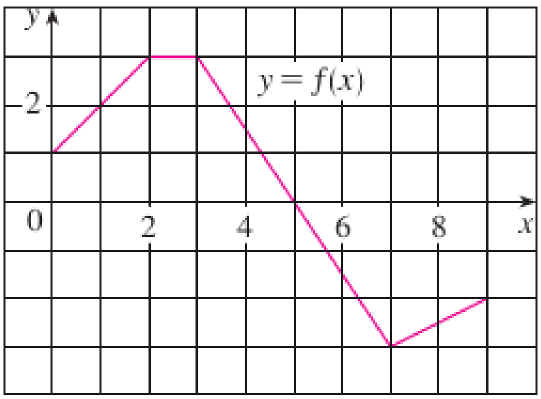
   (a) Explicar qué significa que $y = f(x)$ sea solución de (1).

   (b) Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de (1) y α_1, α_2 son números reales, probar que $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ también es solución de (1).

Examen práctico: febrero de 2023

Nombre: ....

1. Considere la función $f : [0, 9] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica es la siguiente:



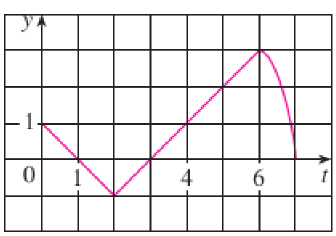
   a) Determine si existe $a \in [0, 9]$ tal que $\int_0^a f(x)\, dx = 0$ (no es necesario calcular a explícitamente).

   b) Si $g : [0, 9] \to \mathbb{R}$ es la función $x^3 - 5x^2 + bx + c$, con $b, c \in \mathbb{R}$, hallar b y c para que los gráficos de f y g sean tangentes en $x = 5$.

2. Calcule las siguientes integrales

   a) $\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-5x+6}\, dx$ b) $\int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x \, dx$.

3. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra abajo. Determine y clasifique los extremos relativos y absolutos de g.



4. Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y' = 2xy + 3x^2 e^{x^2}, y(0) = 5.$$